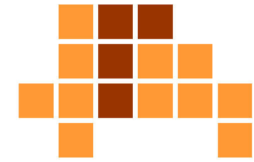
Algorithmen und Datenstrukturen
Korrektheit von Algorithmen

Matthias Teschner
Graphische Datenverarbeitung
Institut für Informatik
Universität Freiburg

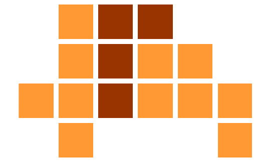
SS 12

Lernziele der Vorlesung



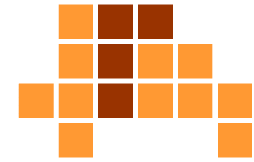
- Algorithmen
  - Sortieren, Suchen, Optimieren
- Datenstrukturen
  - Repräsentation von Daten
  - Listen, Stapel, Schlangen, Bäume
- Techniken zum Entwurf von Algorithmen
  - Algorithmenmuster
  - Greedy, Backtracking, Divide-and-Conquer
- Analyse von Algorithmen
  - Korrektheit, Effizienz

Analyse von Algorithmen



- Korrektheit
  - Ein korrekter Algorithmus stoppt (terminiert) für jede Eingabeinstanz mit der durch die Eingabe-Ausgabe-Relation definierten Ausgabe.
  - Ein inkorrekter Algorithmus stoppt nicht oder stoppt mit einer nicht durch die Eingabe-Ausgabe-Relation vorgegebenen Ausgabe.
- Effizienz
  - Bedarf an Speicherplatz und Rechenzeit
  - Wachstum (Wachstumsgrad, Wachstumsrate) der Rechenzeit bei steigender Anzahl der Eingabe-Elemente (Laufzeitkomplexität)

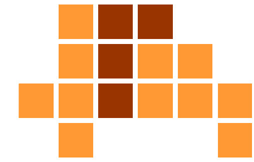
Quelle



- Michael Gellner, "Der Umgang mit dem Hoare-Kalkül zur Programmverifikation", Universität Rostock

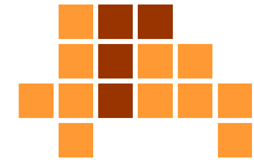
  http://www.informatik.uni-rostock.de/mmis/courses/ss07/23002/hoare-gellner.pdf

Überblick



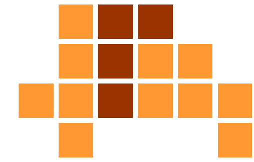
- Motivation
- Korrektheit
- Hoare-Kalkül
  - Einführung
  - Grundlagen
  - Regeln
  - Verifikation
- Beispiel
  - ganzzahliger Rest
  - Quadrat einer Zahl
  - Potenzieren
  - Suche eines Elements

Motivation



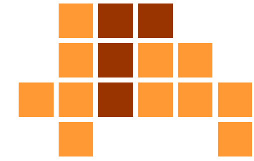
- Programmfehler sind teuer.
  - Prototype der Ariane-5-Rakete der ESA mit vier Satelliten wird eine Minute nach dem Start gesprengt (1996).
  - Fehler bei Typumwandlung in Ada
  - 12 Mrd. DM Entwicklung
  - 250 Mio. DM Start
  - 850 Mio. DM Satelliten
  - 600 Mio. DM Nachbesserungen
  - nächster erfolgloser Test nach 1,5 Jahren
  - erster kommerzieller, erfolgreicher Flug 1999

Motivation



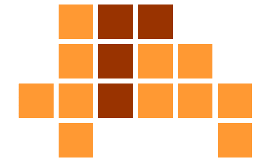
- Programmfehler kosten Menschenleben.
  - 1985 Bestrahlungsgerät. Drei Tote.
  - 1991 Patriot-Rakete. 28 Tote.
  - 1993 Flugzeug. Fehlerhafte Bodenkontakterkennung. 2 Tote.
  - 2007 vollautomatisches 35-mm-Flakgeschütz. 10 Tote.
  - 2008 Flugzeug. Beinahe-Crash durch Computereingriff am Querruder durch Umschalten vom Anflug- in Bodenmodus

Fehlerarten



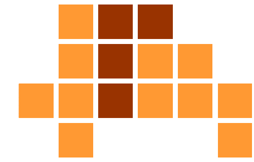
- syntaktisch
  - Kompilierung nicht erfolgreich oder Interpretation bricht ab
- semantisch
  - Abweichung zwischen Spezifikation und Implementierung
- weitere Fehler
  - Speicherlecks (Programm belegt kontinuierlich mehr Speicher)
  - fehlerhaftes Bedienkonzept (Programm reagiert auf Eingaben nicht, wie vom Benutzer erwartet)

Überblick



- Motivation
- Korrektheit
- Hoare-Kalkül
  - Einführung
  - Grundlagen
  - Regeln
  - Verifikation
- Beispiel
  - ganzzahliger Rest
  - Quadrat einer Zahl
  - Potenzieren
  - Suche eines Elements

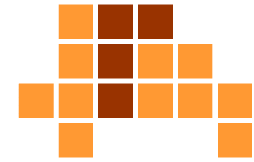
Algorithmus



- wohldefinierte Rechenvorschrift, die eine Menge von Elementen als Eingabe verwendet und eine Menge von Elementen als Ausgabe erzeugt
- beschreibt eine Rechenvorschrift zum Erhalt einer durch die Formulierung eines Problems gegebenen Eingabe-Ausgabe-Beziehung

$$\text{Algorithmus} f : \text{Eingabe} \rightarrow \text{Ausgabe}$$

Beispiel
Rest bei ganzzahliger Division



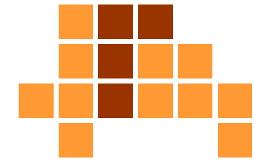
- Eingabe: Dividend, Divisor $(x \geq 0, y > 0)$
- Ausgabe: ganzzahliger Rest r

```
function rest (x:integer; y:integer) : integer;
var q, r : integer;
begin
    q := 0; r := x;
    while r >= y do
    begin
        r := r-y; q := q+1;
    end;
    rest := r;
end;
```

Pascal !

- Liefert die Funktion immer den korrekten Rest für gültige Eingaben? Stimmt die Spezifikation mit der Implementierung überein?

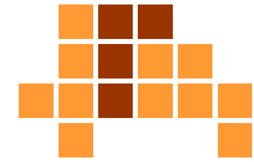
Korrektheit



- Ein Programm S ist bezüglich einer Vorbedingung P und einer Nachbedingung Q partiell korrekt, wenn für jede Eingabe, die P erfüllt, das Ergebnis auch Q erfüllt, falls das Programm terminiert.
- Ein Programm ist total korrekt, wenn es partiell korrekt ist und für jede Eingabe, die P erfüllt, terminiert.
- Beispiel:
  - Vorbedingung: gültige Werte für Divisor und Dividend
  - Nachbedingung: Programm liefert den ganzzahligen Rest

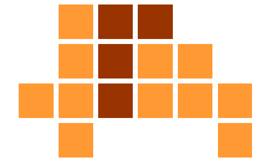
- Wir beschränken uns auf partielle Korrektheit.

Überblick



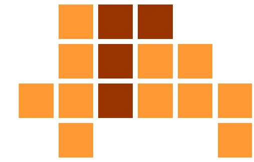
- Motivation
- Korrektheit
- Hoare-Kalkül
  - Einführung
  - Grundlagen
  - Regeln
  - Verifikation
- Beispiel
  - ganzzahliger Rest
  - Quadrat einer Zahl
  - Potenzieren
  - Suche eines Elements

Hoare-Kalkül



- formales System zum Beweisen der Korrektheit imperativer Programme
- von Sir Charles Antony Richard Hoare (1969) entwickelt, mit Beiträgen von Lauer (1971) und Dijkstra (1982)
- besteht aus Axiomen und Ableitungsregeln für alle Konstrukte einer einfachen imperativen Programmiersprache
  - elementare Operationen
  - sequenzielle Ausführung
  - bedingte Ausführung
  - Schleife

Hoare-Tripel

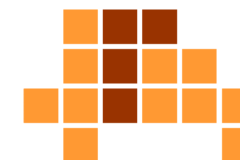


- zentrales Element des Hoare-Kalküls
- beschreibt die Zustandsveränderung durch eine Berechnung

$$\{P\}\ S\ \{Q\}$$

- P und Q
  - sind Zusicherungen (Vor- und Nachbedingung).
  - sind Formeln der Prädikatenlogik.
- S ist ein Programmsegment.
- Wenn Programmzustand P vor der Ausführung von S gilt, dann gilt Q nach der Ausführung von S.
- Beispiel: $\{x + 1 = 43\}\ y := x + 1\ \{y = 43\}$

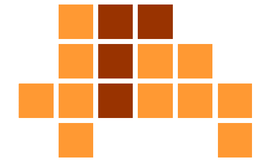
Prinzip der Verifikation



$$\{P\}\ S_1\ \{A_1\}\ S_2\ \{A_{n-1}\}\ S_n\{Q\}$$

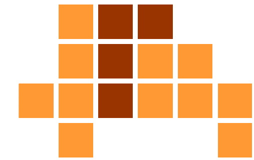
- { P } und { Q }
  - sind Vor- und Nachbedingung des Programms S_1, S_2, ..., S_n
  - stellen die Spezifikation der Ein- / Ausgabe-Relation dar
  - sind definierte, bekannte Zusicherungen
- A_1, A_2, ..., A_{n-1}
  - sind unbekannte Zusicherungen
  - werden durch das Hoare-Kalkül bestimmt
  - beispielsweise wird A_{n-1} über eine Hoare-Regel für das Hoare-Tripel { A_{n-1} } S_n { Q } mit bekanntem S_n und bekanntem { Q } bestimmt
- Tritt dabei kein Widerspruch auf, ist S_1, S_2, ..., S_n partiell korrekt bezüglich { P } und { Q }.

Überblick



- Motivation
- Korrektheit
- Hoare-Kalkül
  - Einführung
  - Grundlagen
  - Regeln
  - Verifikation
- Beispiel
  - ganzzahliger Rest
  - Quadrat einer Zahl
  - Potenzieren
  - Suche eines Elements

Aussagenlogik



- beschäftigt sich mit Aussagen und deren Verknüpfung durch logische Operatoren
- Motivation:
  - Zusicherungen müssen formal wahr oder falsch sein.
  - Notwendigkeit von Auswertungen oder Umformungen logischer Ausdrücke.

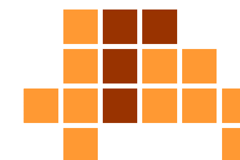
A	$\neg$ A
wahr	falsch
falsch	wahr

Negation
Verneinung einer Aussage

A	B	A $\wedge$ B
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch

Konjunktion
Und

Aussagenlogik



A	B	$A \vee B$
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	falsch

Disjunktion
Nichtausschließendes Oder

A	B	$A \oplus B$
wahr	wahr	falsch
wahr	falsch	wahr
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	falsch

Kontravalenz
Ausschließendes Oder
Exklusives Oder
Entweder Oder

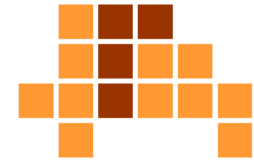
A	B	$A \rightarrow B$
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	wahr

Implikation
Wenn dann

A	B	$A \leftrightarrow B$
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	wahr

Äquivalenz
Genau dann wenn

Aussagenlogik

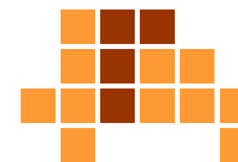


- Umformung logischer Aussagen
- beispielsweise mit Hilfe der De Morganschen Regeln

$$\neg (A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg (A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

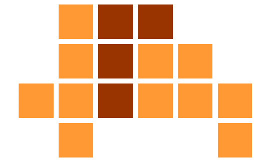
Prädikatenlogik



- Erweiterung der Aussagenlogik um Quantoren (Operatoren)
- Existenzquantor: $\exists x$
  - für mindestens ein Element x gilt
  - es existiert ein Element x, für das gilt
- Allquantor: $\forall x$
  - für alle Elemente x gilt

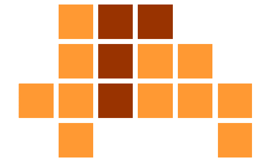
- Beispiel
  $x \in N$
  $\exists x: A(x) \leftrightarrow A(0) \vee A(1) \vee A(2) \ldots$
  $\forall x: A(x) \leftrightarrow A(0) \wedge A(1) \wedge A(2) \ldots$

Überblick



- Motivation
- Korrektheit
- Hoare-Kalkül
  - Einführung
  - Grundlagen
  - Regeln
  - Verifikation
- Beispiel
  - ganzzahliger Rest
  - Quadrat einer Zahl
  - Potenzieren
  - Suche eines Elements

Hoare-Regeln

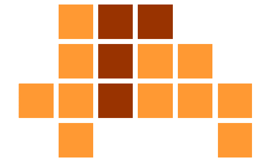


- Hoare-Kalkül besteht aus Menge von Regeln
- Regeln bestehen aus Prämissen und Schlussfolgerungen

$$\frac{\text{Prämisse 1} \quad \text{Prämisse 2} \quad \ldots \quad \text{Prämisse n}}{\text{Konklusion}}$$

- Wenn alle Prämissen erfüllt sind, dann folgt die Konklusion (Schlussfolgerung).
- Ähnlich zur Implikation, aber keine Aussage, sondern eine Schlussregel.

Beispiel zum Aufbau einer Regel



Pokerregeln gelten

Ich habe Pik 10

Ich habe Pik Bube

Ich habe Pik Dame

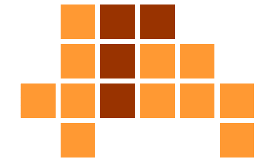
Ich habe Pik König

Ich habe Pik As

Nur ich habe eine Straße

Ich gewinne das Spiel

Beispiele für Schlussregeln



- Modus tollens

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad \neg B}{\neg A}$$

Wenn ich ein Pik Ass habe, dann habe ich eine Pik Straße ($A \Rightarrow B$)
Ich habe keine Pik Straße ($\neg B$)

Ich habe kein Pik Ass ($\neg A$)

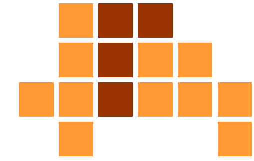
- Modus ponens

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}$$

Wenn ich ein Pik Ass habe, dann habe ich eine Pik Straße ($A \Rightarrow B$)
Ich habe ein Pik Ass (A)

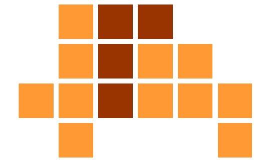
Ich habe eine Pik Straße (B)

Schlussregeln für Hoare-Tripel



- Hoare-Tripel { P } S { Q }
- Axiome und Ableitungsregeln für die Zusicherungen P und Q für alle Konstrukte S einer einfachen imperativen Programmiersprache
  - elementare Operationen
  - sequenzielle Ausführung
  - bedingte Ausführung
  - Schleife

Axiom der leeren Anweisung

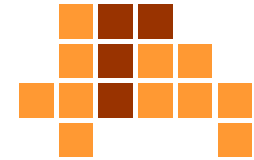


- Für eine Programmsequenz, die den Zustand von Variablen nicht verändert, bleibt die Vorbedingung auch nach Ausführung der Sequenz gültig.

$$\frac{}{\{ P \}\ NOP\ \{ P \}}$$

- keine Prämisse, gilt immer

Zuweisungsaxiom



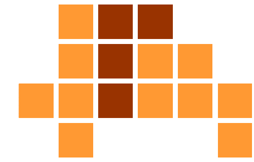
- Regel für Zuweisungen bzw. Ergibt-Anweisungen

$$\{ P^x_E \} \texttt{ x := E } \{ P \}$$

- In P wird x durch E substituiert, um P^x_E zu erhalten.
- keine Prämisse, gilt immer, muss nicht begründet werden
- wenn Nachbedingung bekannt, dann kann Vorbedingung abgeleitet werden
- Beispiel:

Vorbedingung:	{ ? }		{ x+1 > a }
Programmsequenz:	`x := x+1;`	⇒	`x := x+1;`
Nachbedingung:	{ x > a }		{ x > a }

Zuweisungsaxiom

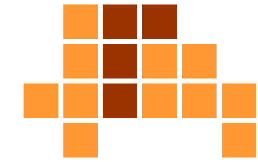


- Beispiel:

$\{ ? \}$		$\{ x = (q + 1) \cdot y - (r - y) \wedge r - y > 0 \}$
`r := r - y;`	$\Rightarrow$	`r := r - y;`
$\{ x = (q + 1) \cdot y - r \wedge r > 0 \}$		$\{ x = (q + 1) \cdot y - r \wedge r > 0 \}$

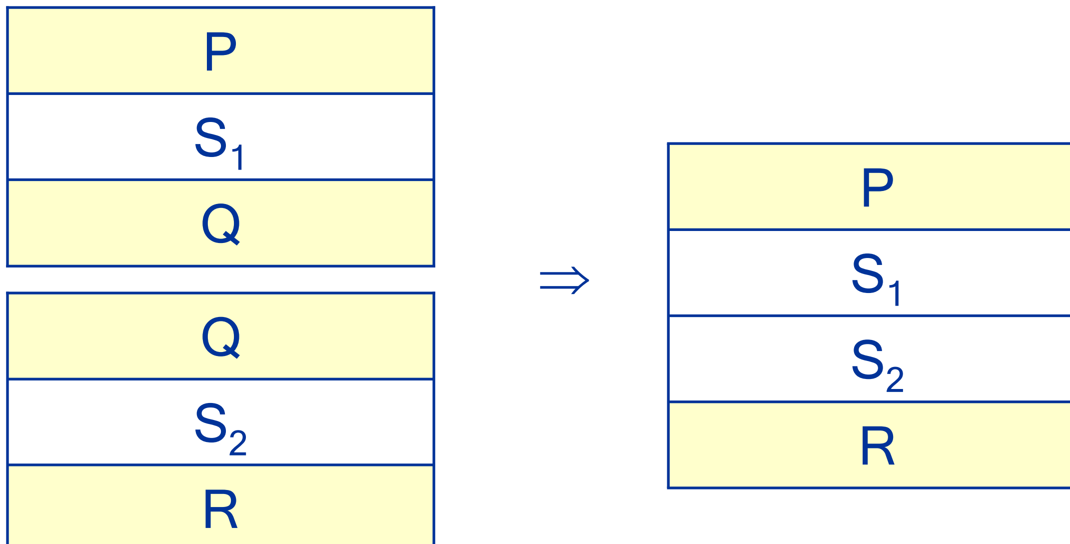
- Im unteren Ausdruck wird r durch r-y ersetzt, um den oberen Ausdruck zu erhalten.
- Prinzip der Probe: Beginne mit dem Ergebnis, rechne rückwärts und hoffe, keinen Widerspruch zu finden.

Regel für Anweisungsfolgen

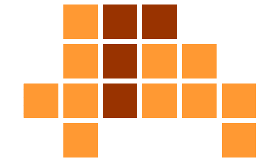


- Zwei aufeinanderfolgende Anweisungen können zu einem Programmstück zusammengefasst werden, wenn die Nachbedingung der ersten Anweisung äquivalent zur Vorbedingung der zweiten Anweisung ist.

$$\frac{\{\,P\,\}\ S_1\ \{\,Q\,\} \qquad \{\,Q\,\}\ S_2\ \{\,R\,\}}{\{\,P\,\}\ S_1\ ;\ S_2\ \{\,R\,\}}$$



Regel für Anweisungsfolgen

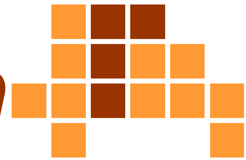


- erlaubt das zeilenweise (befehlsweise, anweisungsweise) Auswerten von Anweisungssequenzen

		$\{ x = y \cdot (q+1) + r-y \}$		$\{ x = y \cdot (q+1) + r-y \}$
`r := r - y;`		`r := r - y;`		`r := r - y;`
`q := q + 1;`	$\Rightarrow$	$\{ x = y \cdot (q+1) + r \}$	$\Leftrightarrow$	`q := q + 1;`
$\{ x = y \cdot q + r \}$		`q := q + 1;`		$\{ x = y \cdot q + r \}$
		$\{ x = y \cdot q + r \}$		

- ermöglicht das Einbringen von Zusicherungen zwischen Anweisungen

Regel für bedingte Anweisungen

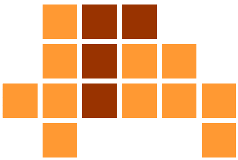


- Anweisung S_1 führt unter Bedingung B von Zustand P zu Zustand R
- Anweisung S_2 führt unter Bedingung $\neg$ B von Zustand P zu Zustand R

$$\frac{\{ P \wedge B \}\ S_1\ \{ R \} \qquad \{ P \wedge \neg B \}\ S_2\ \{ R \}}{\{ P \}\ \texttt{if}\ B\ \texttt{then}\ S_1\ \texttt{else}\ S_2\ \{ R \}}$$

P	
B ?	
true	false
$P \wedge B$	$P \wedge \neg B$
S_1	S_2
R	R
R	

Regel für bedingte Anweisungen



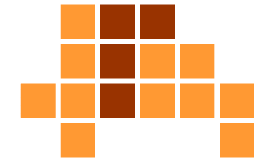
- Beispiel:

P	
B ?	
true	false
$P \wedge B$	$P \wedge \neg B$
S_1	S_2
R	R
R	

{ x>0 }	
`if (x==5)`	
`then`	`else`
$\{ x>0 \wedge x=5 \}$	$\{ x>0 \wedge x \neq 5 \}$
`x := 0;`	`x := 1;`
$\{ x=0 \vee x=1 \}$	$\{ x=0 \vee x=1 \}$
$\{ x=0 \vee x=1 \}$	

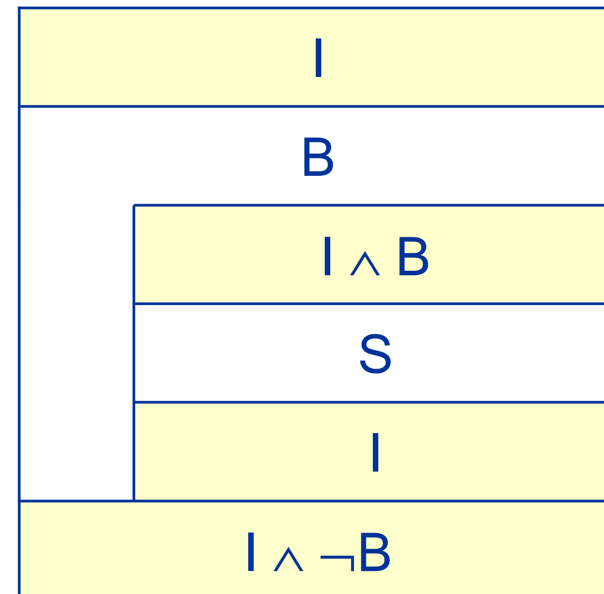
- { x>0 }
  `if (x==5) then x:=1; else x:=0;`
  $\{ x=0 \vee x=1 \}$

Regel für Schleifen

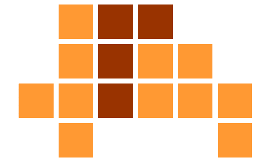


- Unter Bedingung B wird Anweisung S wiederholt ausgeführt, bis $\neg$ B gilt
- Zur Verifikation von Schleifen muss eine Invariante I gefunden werden (Zusicherung, die durch die Schleife nicht verändert wird).
- sichert nicht die Terminierung zu

$$\frac{\{\,I \wedge B\,\}\; S\; \{\,I\,\}}{\{\,I\,\}\;\texttt{while}\; B\; \texttt{do}\; S\; \{\,I \wedge \neg B\,\}}$$

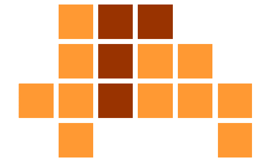


Schleifeninvariante



- Schleifenanweisungen verändern Zustände einzelner Variablen.
- Es muss eine Verknüpfung (Funktion) dieser Variablen gefunden werden, die unverändert bleibt.
- Tabellarische Aufstellung aller Variablen für die ersten Schleifendurchläufe kann hilfreich zum Finden dieser Funktion sein.
- Berücksichtigung der Motivation für die Entwicklung der Schleife kann hilfreich sein.

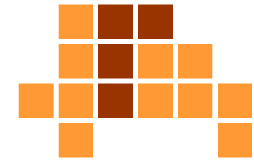
Regeln für weitere Sprachkonstrukte



- Oft können weitere Sprachkonstrukte auf die zuvor behandelten Konstrukte abgebildet werden.

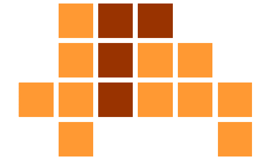
- `for do` $\Rightarrow$ `while do`
- `repeat until` $\Rightarrow$ `while do`
- `case` $\Rightarrow$ `if then else`

Überblick



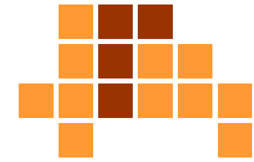
- Motivation
- Korrektheit
- Hoare-Kalkül
  - Einführung
  - Grundlagen
  - Regeln
  - Verifikation
- Beispiel
  - ganzzahliger Rest
  - Quadrat einer Zahl
  - Potenzieren
  - Suche eines Elements

Prinzip der Verifikation



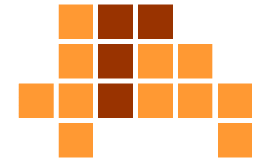
- Formulierung der Nachbedingung des ganzen Programms (formale Beschreibung, wozu das Programm dient)
- Formulierung der Vorbedingung des Programms (formale Beschreibung der Anforderung an die Eingabe)
- Anwendung der Hoare-Regeln von unten nach oben
- Schleifen werden von außen nach innen ausgewertet.
- Wenn Hoare-Klauseln für alle Anweisungen ermittelt sind, liegt eine Beweisskizze vor.
- Enthalten die Klauseln keinen Widerspruch, ist das Programm partiell korrekt bezüglich der Vor- und Nachbedingung.

Überblick



- Motivation
- Korrektheit
- Hoare-Kalkül
  - Einführung
  - Grundlagen
  - Regeln
  - Verifikation
- Beispiel
  - ganzzahliger Rest
  - Quadrat einer Zahl
  - Potenzieren
  - Suche eines Elements

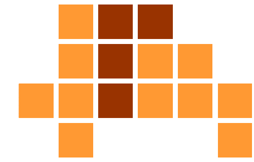
Rest bei ganzzahliger Division



- Eingabe: Dividend, Divisor
- Ausgabe: ganzzahliger Rest

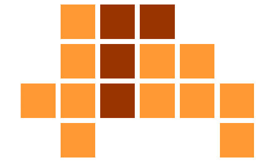
```
function rest (x:integer; y:integer) : integer;
var q, r : integer;
begin
   q := 0; r := x;
   while r >= y do
   begin
      r := r-y; q := q+1;
   end;
   rest := r;
end
```

Relevanter Programmteil



<table>
<tr><td colspan="2" align="center"><code>q := 0;</code></td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center"><code>r := x;</code></td></tr>
<tr><td colspan="2"><code>while r >= y do begin</code></td></tr>
<tr><td rowspan="2" valign="bottom"><code>end</code></td><td align="center"><code>r := r - y;</code></td></tr>
<tr><td align="center"><code>q := q + 1;</code></td></tr>
</table>

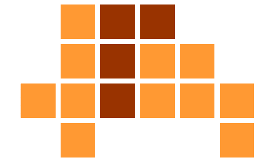
Vor – und Nachbedingung



- sinnvolle Eingaben: $x \geq 0 \wedge y > 0$ (keine Division durch Null)
- Der Rest ist ermittelt, wenn nach q Schleifendurchläufen $q \cdot y$ vom Eingabewert x subtrahiert wurde: $r = x - q \cdot y$.
- Überprüfen, ob diese Formulierung wirklich dem Zweck des Programms entspricht!

{P} $\{x \geq 0 \wedge y > 0\}$	
`q := 0;`	
`r := x;`	
`while r >= y do begin`	
	`r := r - y;`
`end`	`q := q + 1;`
{Q} $\{x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0 \wedge r < y\}$	

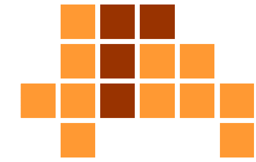
Verifikation der Schleife



$\{ I \}$	
`while r >= y do begin`	
	$\{ I \wedge B \}$
	`r := r - y;`
	`q := q + 1;`
`end`	$\{ I \}$
$\{ I \wedge \neg B \}$	

- Ermitteln von $\{ I \}$ und $\{ B \}$
- $\{ B \}$ ist identisch mit der while-Klausel: $r \geq y$
- Als $\{ I \}$ kann in diesem Fall die Nachbedingung des Programms ausprobiert werden: $x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0$

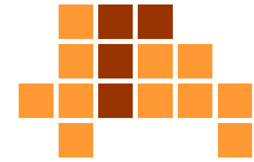
Verifikation der Schleife



$\{I\}\quad\{x = q \cdot y + r \land r \geq 0\}$	
`while r >= y do begin`	
	$\{I \land B\}\quad\{x = q \cdot y + r \land r \geq 0 \land r \geq y\}$
	`r := r - y;`
	`q := q + 1;`
`end`	$\{I\}\quad\{x = q \cdot y + r \land r \geq 0\}$
$\{I \land \neg B\}\quad\{x = q \cdot y + r \land r \geq 0 \land r < y\}$	

- Als Nachbedingung der letzten Schleifenanweisung wird $\{ I \}$ eingesetzt. $\{ B \}$ muss nicht gelten!
- Als Vorbedingung der ersten Schleifenanweisung wird $\{ I \land B \}$ eingesetzt.

Verifikation der inneren Anweisungen



zweite Anweisung

$\{ x = (q+1) \cdot y + r \wedge r \geq 0 \}$
`q := q + 1;`
$\{x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0 \}$

erste Anweisung

$\{ x = (q+1) \cdot y + r - y \wedge r - y \geq 0 \}$
`r := r - y;`
$\{x = (q+1) \cdot y + r \wedge r \geq 0 \}$

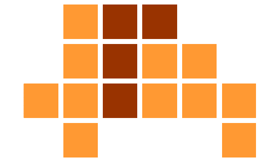
$\Rightarrow$

Verknüpfung

$\{ x = (q+1) \cdot y + r - y \wedge r - y \geq 0 \}$
`r := r - y;`
`q := q + 1;`
$\{ x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0 \}$

wird auf der nächsten Folie
in die Schleife eingetragen

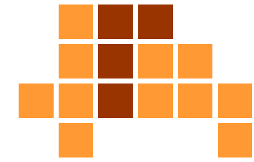
Verifikation der Schleife



- Prüfung, ob die ermittelte Vorbedingung für die Zuweisungen mit der Schleifeninvariante und der Schleifenbedingung äquivalent ist

$\{ I \} \quad \{ x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0 \}$	
`while r >= y do begin`	
	$\{ I \wedge B \} \quad \{ x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0 \wedge r \geq y \}$
	$\{ x = (q+1) \cdot y + r - y \wedge r - y \geq 0 \}$
	`r := r - y;`
	`q := q + 1;`
`end`	$\{ I \} \quad \{ x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0 \}$
$\{ I \wedge \neg B \} \quad \{ x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0 \wedge r < y \}$	

Verifikation der Schleife

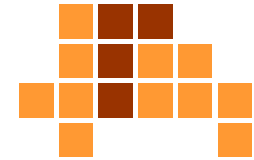


- auf Widerspruch testen

$$\frac{\{ I \land B \} \quad \{ x = q \cdot y + r \land r \geq 0 \land r \geq y \}}{\{ x = (q+1) \cdot y + r - y \land r - y \geq 0 \}}$$

- $x = (q+1) \cdot y + r - y = q \cdot y + r$
- $r - y \geq 0 \Leftrightarrow r \geq y \Rightarrow r \geq 0$
- kein Widerspruch

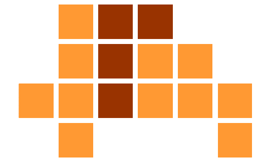
Zwischenstand



$\{x \geq 0 \wedge y > 0\}$	
`q := 0;`	
`r := x;`	
$\{x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0\}$	
`while r >= y do begin`	
	`r := r - y;`
`end`	`q := q + 1;`
$\{x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0 \wedge r < y\}$	

Diese beiden Anweisungen müssen noch behandelt werden.

Verifikation der Initialisierung



zweite Anweisung

$\{ x = q \cdot y + x \wedge x \geq 0 \}$
`r := x;`
$\{ x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0 \}$

erste Anweisung

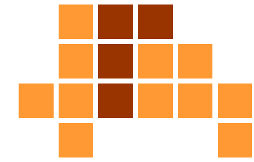
$\{ x = 0 \cdot y + x \wedge x \geq 0 \}$
`q := 0;`
$\{ x = q \cdot y + x \wedge x \geq 0 \}$

$\Rightarrow$

Verknüpfung

$\{ x = 0 \cdot y + x \wedge x \geq 0 \}$
`q := 0;`
`r := x;`
$\{ x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0 \}$

Fertig



$\{ x \geq 0 \wedge y > 0 \}$

$\{ x = 0 \cdot y + x \wedge x \geq 0 \}$

```
q := 0;
r := x;
```

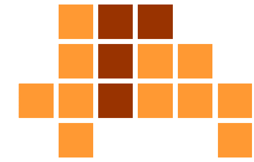
$\{ x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0 \}$

```
while r >= y do begin
    r := r - y;
    q := q + 1;
end
```

$\{ x = q \cdot y + r \wedge r \geq 0 \wedge r < y \}$

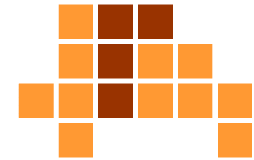
Kein Widerspruch.

Überblick



- Motivation
- Korrektheit
- Hoare-Kalkül
  - Einführung
  - Grundlagen
  - Regeln
  - Verifikation
- Beispiel
  - ganzzahliger Rest
  - Quadrat einer Zahl
  - Potenzieren
  - Suche eines Elements

Quadrat einer Zahl



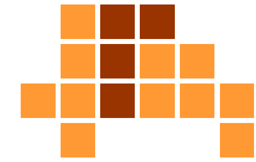
- Eingabe: natürliche Zahl n
- Ausgabe: Quadrat der Eingabe $quad = n^2$

```
function quad (n:integer) : integer;
var i, k, y : integer;
begin
    i := 0; k := -1; y := 0;
    while i < n do
    begin
        i := i + 1; k := k + 2; y := y + k;
    end;
    quad := y;
end;
```

Wir beweisen lediglich, dass die Implementierung mit der Spezifikation übereinstimmt unter der Bedingung, dass die unten aufgeführte Idee / Motivation korrekt ist. Ob die dort angegebene Summe mit dem Quadrat von n übereinstimmt, wird nicht überprüft.

- Motivation $n^2 = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$

Relevanter Programmteil
Vor- und Nachbedingung

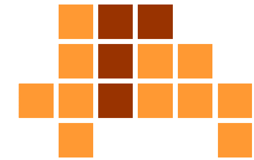


$\{ n \geq 0 \}$

```
i := 0;
k := -1;
y := 0;
while i < n do begin
    i := i + 1;
    k := k + 2;
    y := y + k;
end
```

$\{ y = n^2 \}$

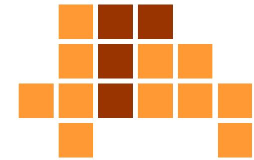
Verifikation der Schleife



{ I }	
`while i < n do begin`	
	{ I ∧ B }
	`i := i + 1;`
	`k := k + 2;`
	`y := y + k;`
`end`	{ I }
{ I ∧ ¬B }	

- Ermitteln von { I } und { B }
- { B } ist identisch mit der while-Klausel: i < n
- { I } wird in diesem Fall durch Betrachten einiger beispielhafter Schleifendurchläufe ermittelt.

Schleifeninvariante

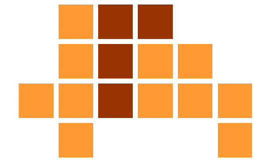


- Status der Variablen während des Schleifendurchlaufs (n=5)

Variablen / Schleifendurchlauf	i	k	y	n
Schleifen-Eintritt	0	-1	0	5
Erster Durchlauf	1	1	1	5
Zweiter Durchlauf	2	3	4	5
Dritter Durchlauf	3	5	9	5
Vierter Durchlauf	4	7	16	5
Fünfter Durchlauf	5	9	25	5

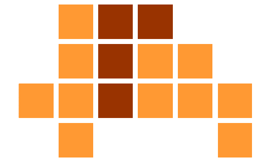
- Folgende Invariante kann abgeleitet werden:
  $\{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \}$

Verifikation der Schleife



$\{ I \}\quad \{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \}$	
`while i < n do begin`	
	$\{ I \wedge B \} \{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \wedge i < n \}$
	`i := i + 1;`
	`k := k + 2;`
	`y := y + k;`
`end`	$\{ I \}\quad \{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \}$
$\{ I \wedge \neg B \}\quad \{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \wedge \neg (i < n) \}$	

Verifikation der Schleife
Innere Anweisungen



$\{ I \} \quad \{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \}$

```
while i < n do begin
```

$\{ I \wedge B \} \{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \wedge i < n \}$

$\{ k + 2 = 2 \cdot (i+1) - 1 \wedge y + k + 2 = (i+1)^2 \wedge i + 1 \leq n \}$

```
i := i + 1;
```

$\{ k + 2 = 2 \cdot i - 1 \wedge y + k + 2 = i^2 \wedge i \leq n \}$

```
k := k + 2;
```

$\{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y + k = i^2 \wedge i \leq n \}$

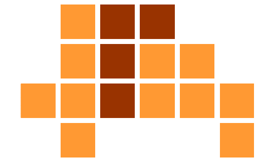
```
y := y + k;
```

$\{ I \} \quad \{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \}$

```
end
```

$\{ I \wedge \neg B \} \quad \{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \wedge \neg (i < n) \}$

Verifikation der Schleife

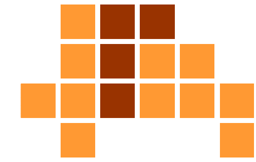


- Vorbedingung der ersten inneren Anweisung und Schleifeninvariante auf Widerspruch testen

$$\frac{\{ I \land B \} \quad \{ k = 2 \cdot i - 1 \land y = i^2 \land i \leq n \land i < n \}}{\{ k + 2 = 2 \cdot (i+1) - 1 \land y + k + 2 = (i+1)^2 \land i + 1 \leq n \}}$$

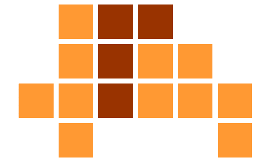
- $k = 2 \cdot (i+1) - 1 - 2 = 2 \cdot i - 1$
- $y = (i+1)^2 - k - 2 = i^2 + 2 \cdot i + 1 - k - 2 = i^2 + k - k = i^2$
- $i + 1 \leq n \Rightarrow i < n$
- kein Widerspruch

Verifikation der Schleife mit einem Implementierungsfehler



$\{ I \} \quad \{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \}$	
`while i < n do begin`	
	$\{ I \wedge B \} \{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \wedge i < n \}$
	$\{ k + 1 = 2 \cdot (i+1) - 1 \wedge y + k + 1 = (i+1)^2 \wedge i + 1 \leq n \}$
	`i := i + 1;`
	$\{ k + 1 = 2 \cdot i - 1 \wedge y + k + 1 = i^2 \wedge i \leq n \}$
	`k := k + 1;`
	$\{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y + k = i^2 \wedge i \leq n \}$
	`y := y + k;`
`end`	$\{ I \} \quad \{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \}$
$\{ I \wedge \neg B \} \quad \{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \wedge \neg (i < n) \}$	

Verifikation der Schleife mit einem Implementierungsfehler

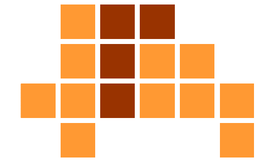


- Vorbedingung der ersten inneren Anweisung und Schleifeninvariante auf Widerspruch testen

$$\frac{\{ I \wedge B \} \quad \{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \wedge i < n \}}{\{ k + 1 = 2 \cdot (i+1) - 1 \wedge y + k + 1 = (i+1)^2 \wedge i + 1 \leq n \}}$$

- $k = 2 \cdot (i+1) - 1 - 1 = 2 \cdot i \neq 2 \cdot i - 1 \quad \Rightarrow \quad$ Widerspruch

Behandlung der Initialisierung



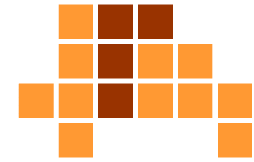
$\{ n \geq 0 \}$
$\{ -1 = 2 \cdot 0 - 1 \wedge 0 = 0^2 \wedge 0 \leq n \}$
`i := 0;`
$\{ -1 = 2 \cdot i - 1 \wedge 0 = i^2 \wedge i \leq n \}$
`k := -1;`
$\{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge 0 = i^2 \wedge i \leq n \}$
`y := 0;`
$\{ k = 2 \cdot i - 1 \wedge y = i^2 \wedge i \leq n \}$

```
while i < n do begin
        i := i + 1;
        k := k + 2;
end     y := y + k;
```

$\{ y = n^2 \}$

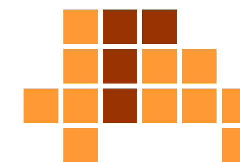
In Ordnung.

Überblick



- Motivation
- Korrektheit
- Hoare-Kalkül
  - Einführung
  - Grundlagen
  - Regeln
  - Verifikation
- Beispiel
  - ganzzahliger Rest
  - Quadrat einer Zahl
  - Potenzieren
  - Suche eines Elements

Berechnung der Potenz x^n



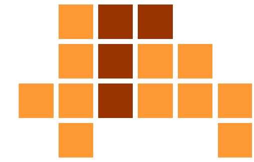
- Eingabe: ganzzahlige Werte x und n mit $n \geq 0$
- Ausgabe: x^n

```
function exp (x:integer; n:integer):integer;
var k, p, y : integer;
begin
    k := n; p := x; y := 1;
    while k>0 do
    begin
        if (k mod 2 == 0)
        then begin
            p := p * p; k:= k / 2;
        end
        else begin
            y := y * p; k := k - 1;
        end;
    end;
    exp := y;
end;
```

wenn k gerade, dann Basis quadrieren, Exponent halbieren: $x^k = (x^2)^{k/2}$

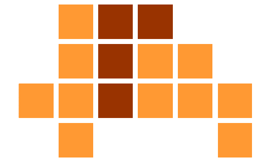
wenn k ungerade, dann Basis mit Zwischenergebnis für den Exponent multiplizieren, dafür k um 1 reduzieren : $x^k = x\,x^{k-1}$

Relevanter Programmteil
Vor- und Nachbedingung



<table>
<tr><td colspan="3">{ $n \geq 0$ }</td></tr>
<tr><td colspan="3"><code>k := n;</code></td></tr>
<tr><td colspan="3"><code>p := x;</code></td></tr>
<tr><td colspan="3"><code>y := 1;</code></td></tr>
<tr><td colspan="3"><code>while k > 0 do begin</code></td></tr>
<tr><td rowspan="4"><code>end</code></td><td colspan="2"><code>if (k mod 2 == 0)</code></td></tr>
<tr><td><code>then</code></td><td><code>else</code></td></tr>
<tr><td><code>p := p * p;</code></td><td><code>y := y * p;</code></td></tr>
<tr><td><code>k := k / 2;</code></td><td><code>k := k - 1;</code></td></tr>
<tr><td colspan="3">{ $y = x^n$ }</td></tr>
</table>

Verifikation der Schleife / Schleifeninvariante

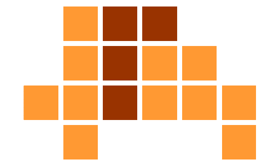


- Status der Variablen während des Schleifendurchlaufs (n=10)

Variablen / Schleifendurchlauf	y	p	k	x	n
Schleifen-Eintritt	1	x	10	x	10
Erster Durchlauf	1	x^2	5	x	10
Zweiter Durchlauf	x^2	x^2	4	x	10
Dritter Durchlauf	x^2	x^4	2	x	10
Vierter Durchlauf	x^2	x^8	1	x	10
Fünfter Durchlauf	x^{10}	x^8	0	x	10

- Folgende Invariante kann abgeleitet werden:
  $\{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \}$

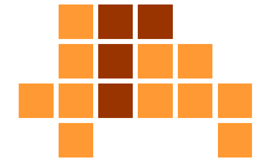
Verifikation der Schleife ...



$\{I\}\ \ \{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \}$		
`while k > 0 do begin`		
	$\{I \wedge B\}\ \ \{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \wedge k > 0 \}$	
	`if (k mod 2 == 0)`	
	`then`	`else`
	`p := p * p;`	`y := y * p;`
	`k := k / 2;`	`k := k - 1;`
`end`	$\{I\}\ \ \{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \}$	
$\{I \wedge \neg B\}\ \ \{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \wedge k \leq 0 \}$		
$\{ y = x^n \}$		

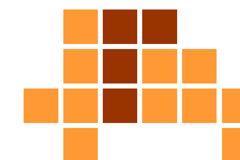
kein Widerspruch zwischen $\{I \wedge \neg B\}$ und der Nachbedingung des Programms {Q}

… benötigt die Verifikation der bedingten Anweisung



<table>
<tr><td colspan="2">$\{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \wedge k > 0 \}$</td></tr>
<tr><td colspan="2"><code>if (k mod 2 == 0)</code></td></tr>
<tr><td><code>then</code></td><td><code>else</code></td></tr>
<tr><td>$\{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \wedge k > 0 \wedge k \bmod 2 = 0\}$</td><td>$\{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \wedge k > 0 \wedge k \bmod 2 \neq 0\}$</td></tr>
<tr><td><code>p := p * p;</code></td><td><code>y := y * p;</code></td></tr>
<tr><td><code>k := k / 2;</code></td><td><code>k := k - 1;</code></td></tr>
<tr><td>$\{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \}$</td><td>$\{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \}$</td></tr>
</table>

Fall 1: k mod 2 = 0

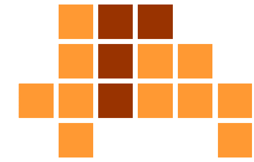


$\{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \wedge k > 0 \wedge k \bmod 2 = 0\}$
$\{ x^n = y \cdot (p \cdot p)^{k/2} \wedge k/2 \geq 0 \wedge k \bmod 2 = 0\}$
`p := p * p;`
$\{ x^n = y \cdot p^{k/2} \wedge k/2 \geq 0 \wedge k \bmod 2 = 0\}$
`k := k / 2;`
$\{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \}$

Die von unten hergeleitete Anforderung widerspricht nicht der von oben kommenden Zusicherung.

k mod 2 = 0 muss hier aufgrund des Datentyps integer gefordert werden.

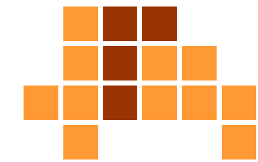
Fall 2: k mod 2 $\neq$ 0



$\{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \wedge k > 0 \wedge k \bmod 2 \neq 0 \}$
$\{ x^n = y \cdot p \cdot p^{k-1} \wedge k-1 \geq 0 \}$
`y := y * p;`
$\{ x^n = y \cdot p^{k-1} \wedge k-1 \geq 0 \}$
`k := k - 1;`
$\{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \}$

Die von unten hergeleitete Anforderung widerspricht nicht der von oben kommenden Zusicherung. Für k mod 2 gibt es keine Anforderung. k>0 wird von unten gefordert und von oben durch $k \geq 0 \wedge k > 0$ auch zugesichert.

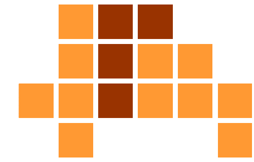
Behandlung der Initialisierung



<table>
<tr><td colspan="3">$\{ n \geq 0 \}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\{ x^n = x^n \wedge n \geq 0 \}$</td></tr>
<tr><td colspan="3"><code>k := n;</code></td></tr>
<tr><td colspan="3">$\{ x^n = x^k \wedge k \geq 0 \}$</td></tr>
<tr><td colspan="3"><code>p := x;</code></td></tr>
<tr><td colspan="3">$\{ x^n = p^k \wedge k \geq 0 \}$</td></tr>
<tr><td colspan="3"><code>y := 1;</code></td></tr>
<tr><td colspan="3">$\{ x^n = y \cdot p^k \wedge k \geq 0 \}$</td></tr>
<tr><td colspan="3"><code>while k > 0 do begin</code></td></tr>
<tr><td rowspan="4"><code>end</code></td><td colspan="2"><code>if (k mod 2 == 0)</code></td></tr>
<tr><td><code>then</code></td><td><code>else</code></td></tr>
<tr><td><code>p := p * p;</code></td><td><code>y := y * p;</code></td></tr>
<tr><td><code>k := k / 2;</code></td><td><code>k := k - 1;</code></td></tr>
<tr><td colspan="3">$\{ y = x^n \}$</td></tr>
</table>

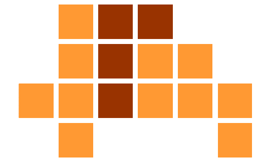
Sieht gut aus.

Überblick



- Motivation
- Korrektheit
- Hoare-Kalkül
  - Einführung
  - Grundlagen
  - Regeln
  - Verifikation
- Beispiel
  - ganzzahliger Rest
  - Quadrat einer Zahl
  - Potenzieren
  - Suche eines Elements

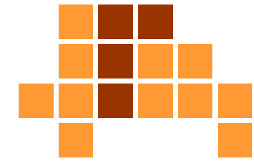
Suche eines Elements



- Eingabe: Menge elem mit n Elementen,
  zu suchendes Element x
- Ausgabe: Index des gesuchten Elements

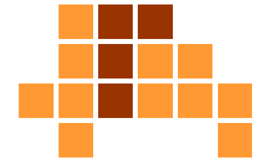
```
function search (x:value; elem:vector):integer;
var i : integer;
begin
   i := 1;
   while elem[i] <> x do
   begin
      i := i + 1;
   end;
   search := i;
end;
```

Relevanter Programmteil Vor- und Nachbedingung



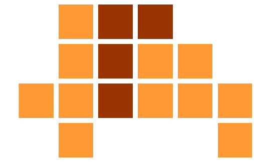
$\{ x \in elem[1..n] \}$	
`i := 1;`	
`while elem[i] <> x do begin`	
`end`	`i := i + 1;`
$\{ elem[i] = x \}$	

Verifikation der Schleife



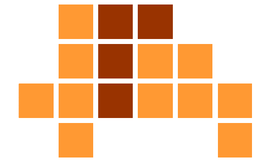
$\{ x \in elem[1..n] \}$	
`i := 1;`	
$\{ I \}$ $\{ x \in elem[i..n] \}$	
`while elem[i] <> x do begin`	
	$\{ I \wedge B \}$ $\{ x \in elem[i..n] \wedge elem[i] \neq x \}$
	`i := i + 1;`
`end`	$\{ I \}$ $\{ x \in elem[i..n] \}$
$\{ I \wedge \neg B \}$ $\{ x \in elem[i..n] \wedge \neg (elem[i] \neq x) \}$	
$\{ elem[i] = x \}$	

Verifikation der inneren Anweisung



$\{ x \in elem[1..n] \}$
`i := 1;`
$\{ I \} \quad \{ x \in elem[i..n] \}$
`while elem[i] <> x do begin`
$\{ x \in elem[i..n] \wedge elem[i] \neq x \}$
$\{ x \in elem[i+1..n] \}$
`i := i + 1;`
`end` $\{ x \in elem[i..n] \}$
$\{ I \wedge \neg B \} \quad \{ x \in elem[i..n] \wedge \neg (elem[i] \neq x) \}$
$\{ elem[i] = x \}$

Verifikation der Schleife



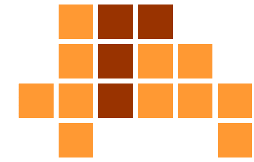
- auf Widerspruch testen

$$\frac{\{ x \in \text{elem}[i..n] \wedge \text{elem}[i] \neq x \}}{\{ x \in \text{elem}[i+1..n] \}}$$

- $x \in \text{elem}[i+1..n] \Rightarrow x \notin \text{elem}[1..i] \Rightarrow x \neq \text{elem}[i]$
- $x \in \text{elem}[i+1..n] \Rightarrow x \in \text{elem}[i..n]$
- kein Widerspruch

- … Behandlung der Initialisierung … fertig

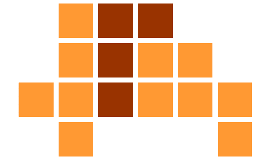
Zusammenfassung



- Motivation
- Korrektheit
- Hoare-Kalkül
- Beispiele

- "Beware of bugs in the above code;
  I have only proved it correct, not tried it."
  Donald Ervin Knuth

Weitere Beispiele

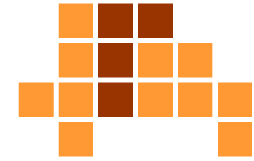


- Michael Gellner, "Der Umgang mit dem Hoare-Kalkül zur Programmverifikation", Universität Rostock

  http://www.informatik.uni-rostock.de/mmis/courses/ss07/23002/hoare-gellner.pdf

- Vorlesungsaufzeichnung SS 2008

Nächstes Thema



- Korrektheit
  - Ein korrekter Algorithmus stoppt (terminiert) für jede Eingabeinstanz mit der durch die Eingabe-Ausgabe-Relation definierten Ausgabe.
  - Ein inkorrekter Algorithmus stoppt nicht oder stoppt mit einer nicht durch die Eingabe-Ausgabe-Relation vorgegebenen Ausgabe.
- Effizienz
  - Bedarf an Speicherplatz und Rechenzeit
  - Wachstum (Wachstumsgrad, Wachstumsrate) der Rechenzeit bei steigender Anzahl der Eingabe-Elemente (Laufzeitkomplexität)