Algorithmen und Datenstrukturen
Teile und Herrsche
und Rekursionsgleichungen

Matthias Teschner
Graphische Datenverarbeitung
Institut für Informatik
Universität Freiburg

SS 12

Lernziele der Vorlesung

- Algorithmen
  - Sortieren, Suchen, Optimieren
- Datenstrukturen
  - Repräsentation von Daten
  - Listen, Stapel, Schlangen, Bäume
- Techniken zum Entwurf von Algorithmen
  - Algorithmenmuster
  - Greedy, Backtracking, Divide-and-Conquer
- Analyse von Algorithmen
  - Korrektheit, Effizienz

Überblick

- Prinzip
- Maximale Teilsumme
  - erste Lösungsansätze
  - Teile-und-Herrsche-Ansatz
  - Laufzeit
- Rekursionsgleichungen
  - Substitutionsmethode
  - Rekursionsbaum-Methode
  - Mastertheorem
- Produkt von Polynomen nach Karatsuba
- Matrixmultiplikation nach Strassen
- Erstellung eines Spielplans

Prinzip

- Teile das Gesamtproblem in kleinere Teilprobleme auf.
- Herrsche über die Teilprobleme durch rekursives Lösen. Wenn die Teilprobleme klein sind, löse sie direkt.
- Verbinde die Lösungen der Teilprobleme zur Lösung des Gesamtproblems.

- rekursive Anwendung des Algorithmus auf immer kleiner werdende Teilprobleme
- direkte Lösung eines hinreichend kleinen Teilproblems

Prinzip

- Methode V zur Lösung des Problems P der Größe n

- Methode V(P)
  wenn n<d
  dann
  löse das Problem P direkt;
  sonst
  teile P in mehrere Teilprobleme
  $P_1, P_2, \ldots, P_k$ mit $k \geq 2$;
  Methode V(P_1); …; Methode V(P_k);
  verbinde die Teillösungen für
  $P_1, P_2, \ldots, P_k$ zur Gesamtlösung für P;

Eigenschaften

- kann bei konzeptionell schwierigen Problemen hilfreich sein
  - Lösung für den Trivialfall muss bekannt sein
  - Aufteilung in Teilprobleme muss möglich sein
  - Kombination der Teillösungen muss möglich sein
- kann effiziente Lösungen realisieren
  - wenn die Lösung des Trivialfalls in O(1) liegt, Aufteilung in Teilprobleme und Kombination der Teillösungen in O(n) liegt und die Zahl der Teilprobleme beschränkt ist, liegt der Algorithmus in O(n log n)
- für Parallelverarbeitung geeignet
  - Teilprobleme werden unabhängig voneinander verarbeitet

Implementierung

- Definition des Trivialfalls
  - Möglichst kleine direkt zu lösende Teilprobleme sind elegant und einfach.
  - Andererseits wird die Effizienz verbessert, wenn schon relativ große Teilprobleme direkt gelöst werden.
  - Rekursionstiefe sollte nicht zu groß werden.
- Aufteilung in Teilprobleme
  - Wahl der Anzahl der Teilprobleme und konkrete Aufteilung kann anspruchsvoll sein.
- Kombination der Teillösungen
  - typischerweise konzeptionell anspruchsvoll

Überblick

- Prinzip
- Maximale Teilsumme
  - erste Lösungsansätze
  - Teile-und-Herrsche-Ansatz
  - Laufzeit
- Rekursionsgleichungen
  - Substitutionsmethode
  - Rekursionsbaum-Methode
  - Mastertheorem
- Produkt von Polynomen nach Karatsuba
- Matrixmultiplikation nach Strassen
- Erstellung eines Spielplans

Maximale Teilsumme

- Eingabe: Folge X von n ganzen Zahlen
- Ausgabe: Maximale Summe einer zusammenhängenden Teilfolge von X und deren Index-Grenzen

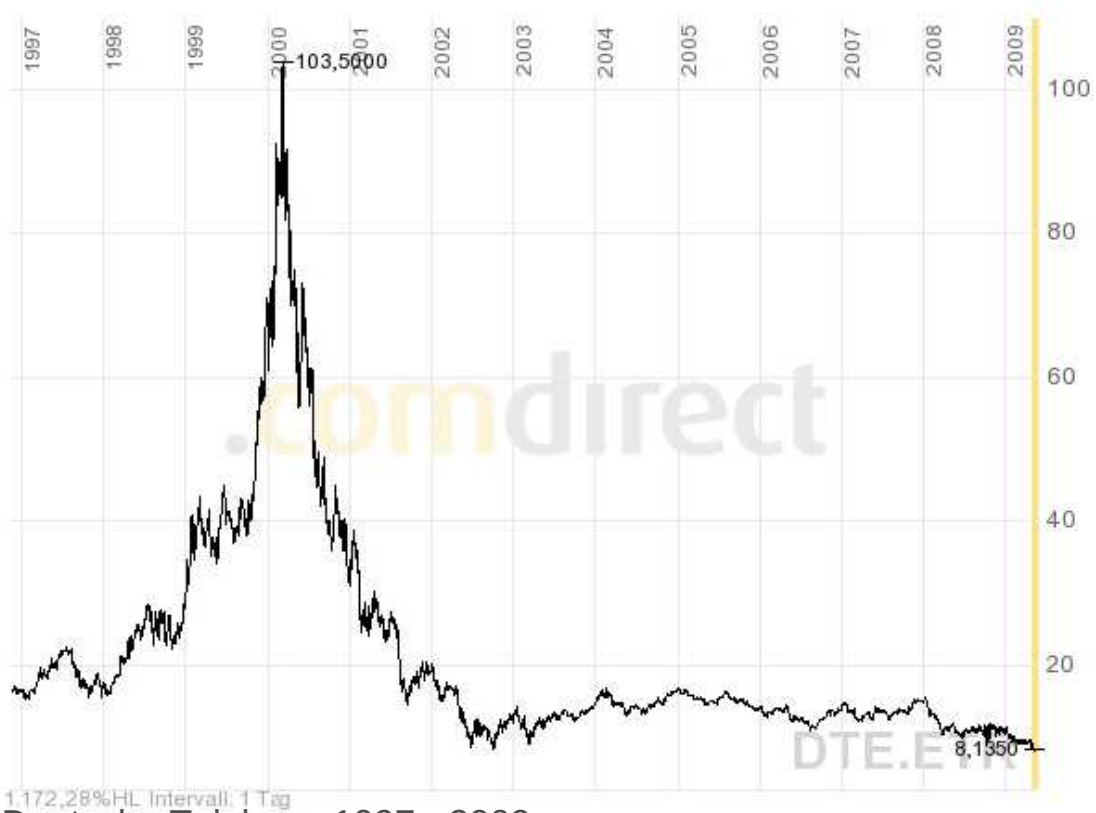
- Eingabe:

Index	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wert	31	-41	59	26	-53	58	97	-93	-23	84

- Ausgabe: 187, 2, 6

Anwendung

- Maximal möglicher Gewinn
  bei Kauf und Verkauf einer Aktie



Deutsche Telekom, 1997 - 2009

Deutsche Bank
+156% März 2009 – Mai 2009

Commerzbank
+164% März 2009 – Mai 2009

Hypo Real Estate
+135% März 2009 – Mai 2009

www.comdirect.de

Naive Lösung (Brute Force)

```
maxSubArray(X)
result.sum=X(0); result.u=0; result.o=0;
   for u=0 to länge(X)-1 do
      for o=u to länge(X)-1 do
      begin
         summe=0;
         for i=u to o do summe=summe+X(i);
         if result.sum<summe then
         begin
            result.sum = summe;
            result.u = u; result.o = o;
         end;
      end;
return result.sum, result.u, result.o;
```

unterer, erster Index des Subarrays

oberer, letzter Index des Subarrays

Java-Implementierung

```
public class MaxSubArray {
   Result result = new Result();
   public static void main(String[] args) {
   }
   public Result maxSubArray(int[] X) {
      result.sum = X[0]; result.u = 0; result.o = 0;
      for (int u = 0; u < X.length; u++) {
         for (int o = u; o < X.length; o++) {
            int summe = 0;
            for (int i = u; i <= o; i++) {
               summe = summe + X[i];
               if (result.sum < summe) {
                  result.sum = summe; result.u = u; result.o = o;
               }
            }
         }
      }
   return result;
   }
}

class Result {
   int sum; int u; int o;
}
```

Laufzeit

```
for u=0 to länge(X)-1 do
    for o=u to länge(X)-1 do
    begin
       summe=0;
       for i=u to o do summe=summe+X(i);
       if result.sum<summe then
       begin
          result.sum = summe;
          result.u = u; result.o = o;
       end;
    end;
```

n Schleifendurchläufe → O(n)

maximal n Schleifendurchläufe → O(n)

maximal n Schleifendurchläufe → O(n)

O(1)

- drei verschachtelte Schleifen O(n) → $O(n^3)$

Laufzeit

u	Additionen	o
	X	
n/3	n/3	n/3

- Es gibt wenigstens n/3 Werte für u, für die n/3 Werte von o durchlaufen werden, für die wiederum n/3 Additionsschritte in der innersten Schleife durchlaufen werden.
- Damit werden mindestens $T(n) = (n/3)^3 \in \Omega(n^3)$ Schritte benötigt.
- Aus $T(n) \in O(n^3)$ und $T(n) \in \Omega(n^3)$ folgt $T(n) \in \Theta(n^3)$

- Es ist schwer, das Problem schlechter zu lösen…

Effizientere Alternative

… aber leicht, es besser zu lösen.

- Bisher: Für jedes u und für jedes o wird
  $S_{u,o} = X(u) + X(u+1) + \ldots + X(o)$ berechnet

- Effizienter:
  Inkrementelle Aktualisierung statt Schleifendurchlauf

aus $S_{u,o} = X(u) + X(u+1) + \ldots + X(o)$

und $S_{u,o+1} = X(u) + X(u+1) + \ldots + X(o) + X(o+1)$

folgt $S_{u,o+1} = S_{u,o} + X(o+1)$ O(1) statt O(n)

Bessere Lösung

```
maxSubArray(X)
result.sum=X(0); result.u=0; result.o=0;
   for u=0 to länge(X)-1 do                    O(n)
   begin
      summe=0;
      for o=u to länge(X)-1 do                 O(n)
      begin
         summe=summe+X(o);
         if result.sum<summe then
         begin                                 O(1)
            result.sum = summe;
            result.u = u; result.o = o;
         end;
      end;
   end;
return result.sum, result.u, result.o;     Gesamtaufwand O(n²)
```

Java-Implementierung

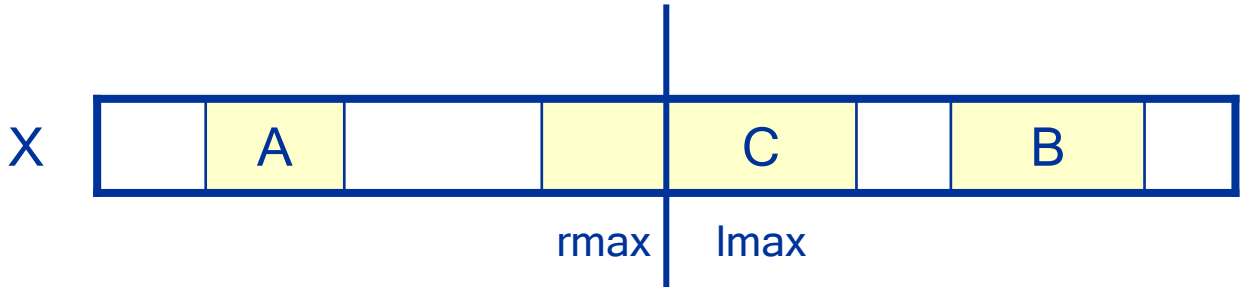
```
public class MaxSubArray {
   Result result = new Result();
   public static void main(String[] args) {
   }
   public Result maxSubArray(int[] X) {
      result.sum = X[0]; result.u = 0; result.o = 0;
      for (int u = 0; u < X.length; u++) {
         int summe = 0;
         for (int o = u; o < X.length; o++) {
            summe = summe + X[o];
            if (result.sum < summe) {
               result.sum = summe;
               result.u = u;
               result.o = o;
            }
         }
      }
   return result;
   }
}

class Result {
   int sum; int u; int o;
}
```

Überblick

- Prinzip
- Maximale Teilsumme
  - erste Lösungsansätze
  - Teile-und-Herrsche-Ansatz
  - Laufzeit
- Rekursionsgleichungen
  - Substitutionsmethode
  - Rekursionsbaum-Methode
  - Mastertheorem
- Produkt von Polynomen nach Karatsuba
- Matrixmultiplikation nach Strassen
- Erstellung eines Spielplans

Idee

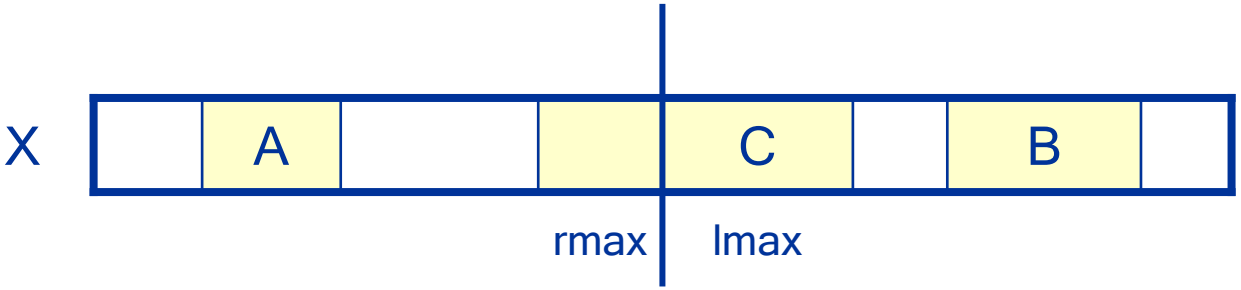
- Löse das Problem für die linke und rechte Hälfte von X.
- Setze die Teillösungen zur Gesamtlösung zusammen.



- Maximum liegt entweder in der linken Hälfte (A) oder in der rechten Hälfte (B)
- Maximum kann auch an der Grenze der Hälften liegen (C).
- Für C müssen rmax und lmax bestimmt werden.
- Gesamtlösung ist Maximum von A, B, C.

Prinzip

- Kleine Probleme werden direkt gelöst: n=1 $\Rightarrow$ Max = X(0)
- Große Probleme werden in zwei Teilprobleme zerlegt und rekursiv gelöst. Teillösungen A und B werden geliefert.



- Um Teillösung C zu ermitteln, werden rmax und lmax für die Teilprobleme bestimmt.
- Die Gesamtlösung ergibt sich als das Maximum von A, B, C.

Implementierung

```
maxSubArray(X, u, o)
```

X sollte eine Referenz / ein Pointer sein.

```
    if (u == o) then return X(u);
```

Trivialfall,
Feld mit nur einem Element
(Rekursionsabbruch)

```
    m = (u+o)/2;
    A = maxSubArray (X, u, m);
    B = maxSubArray (X, m+1, o);
```

Lösungen A und B für
die beiden Teilfelder
(Rekursion)

```
    C1 = rmax (X, u, m);
    C2 = lmax (X, m+1, o);
```

rmax und lmax für
den Grenzfall C

```
    return max (A, B, C1+C2);
```

Lösung ergibt sich als
Maximum aus A, B, C

Für mehr Übersichtlichkeit wird nur das Maximum, nicht die Indexgrenzen berücksichtigt.

Java-Implementierung

```
public class MaxSubArray {

   public static void main(String[] args) {
   }

   public int maxSubArray(int[] X, int u, int o) {

      if (u == o) {
         return X[u];
      }

      int m = (u + o) / 2;
      int A = maxSubArray(X, u, m);
      int B = maxSubArray(X, m + 1, o);

      int C1 = rmax(X, u, m);
      int C2 = lmax(X, m + 1, o);

      return max(A, B, C1 + C2);
   }
…
}
```

Alternativer Trivialfall

```
maxSubArray(X, u, o)

    if (u == o) then return X(u);
    if (u+1==o) then
       return max(X(u),X(o),X(u)+X(o));

    m = (u+o)/2;
    A = maxSubArray (X, u, m);
    B = maxSubArray (X, m+1, o);

    C1 = rmax (X, u, m);
    C2 = lmax (X, m+1, o);

    return max (A, B, C1+C2);
```

Java-Implementierung

```
public int maxSubArrayAlternativ(int[] X, int u, int o) {

   if (u == o) {
      return X[u];
   }

   if (u + 1 == o) {
      return max(X[u], X[o], X[u] + X[o]);
   }

   int m = (u + o) / 2;
   int A = maxSubArrayAlternativ(X, u, m);
   int B = maxSubArrayAlternativ(X, m + 1, o);

   int C1 = rmax(X, u, m);
   int C2 = lmax(X, m + 1, o);

   return max(A, B, C1 + C2);

}
```

Implementierung - max

```
max (a, b, c)

    if (a > b) then
       if (a > c) then
          return a;
       else
          return c;
    else
       if (c > b) then
          return c;
       else
          return b;
```

Java-Implementierung

```
public int max(int a, int b, int c) {

   if (a > b) {
      if (a > c) {
         return a;
      } else {
         return c;
      }
   } else {
      if (c > b) {
         return c;
      } else {
         return b;
      }
   }
}
```

Alternative Implementierung max

```
max (a, b)

    if (a > b) then
        return a;
    else
        return b;

max (a, b, c)
    return max (max(a, b), c);
```

Java-Implementierung

```
public int max2(int a, int b) {

   if (a > b) {
      return a;
   } else {
      return b;
   }
}

public int max3(int a, int b, int c) {

   return max2(max2(a, b), c);
}
```

Implementierung - lmax

```
lmax (X, u, o)

    lmax = X(u);
    summe= X(u);

    for i=u+1 to o do
        begin
        summe = summe + X(i);
        if (summe > lmax) lmax = summe;
        end

    return lmax;
```

rmax analog

Java-Implementierung

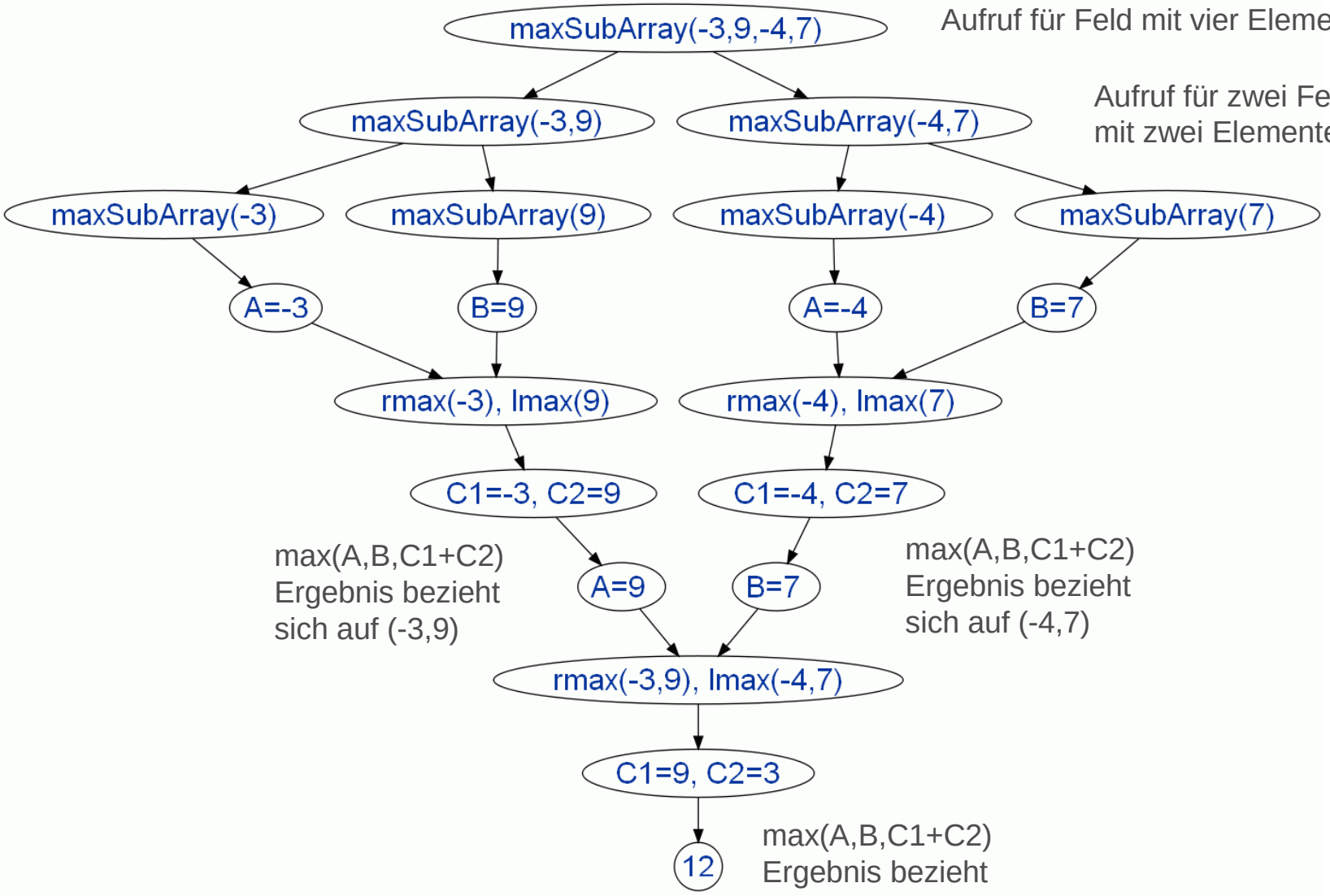
```
public int lmax(int[] X, int u, int o) {

   int lmax = X[u];
   int summe = X[u];
   for (int i = u + 1; i <= o; i++) {
      summe = summe + X[i];
      if (summe > lmax) {
         lmax = summe;
      }
   }
   return lmax;
}

public int rmax(int[] X, int u, int o) {

   int rmax = X[o];
   int summe = X[o];
   for (int i = o - 1; i >= u; i--) {
      summe = summe + X[i];
      if (summe > rmax) {
         rmax = summe;
      }
   }
   return rmax;
}
```

Illustration - lmax

i	u	u+1	...	...	o-1	o
X	58	-53	26	59	-41	31
summe	58	5	31	90	49	80
lmax	58	58	58	90	90	90

- lmax und summe werden mit X(u) initialisiert
- X wird durchlaufen von u bis o
- summe wird aktualisiert
- lmax wird aktualisiert, wenn summe > lmax

Illustration - maxSubArray



Überblick

- Prinzip
- Maximale Teilsumme
  - erste Lösungsansätze
  - Teile-und-Herrsche-Ansatz
  - Laufzeit
- Rekursionsgleichungen
  - Substitutionsmethode
  - Rekursionsbaum-Methode
  - Mastertheorem
- Produkt von Polynomen nach Karatsuba
- Matrixmultiplikation nach Strassen
- Erstellung eines Spielplans

Laufzeit

```
maxSubArray(X, u, o)
```

T (n) – Zahl der Schritte für Problemgröße n

```
    if (u = o) then return X(u);
```

O(1)

```
    m = (u+o)/2;
```

O(1)

```
    A = maxSubArray (X, u, m);
```

T(n/2)

```
    B = maxSubArray (X, m+1, o);
```

T(n/2)

```
    C1 = rmax (X, u, m);
```

O(n)

```
    C2 = lmax (X, m+1, o);
```

O(n)

```
    return max (A, B, C1+C2);
```

O(1)

Zahl der Schritte T(n)

Trivialfall

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n = 1 \\ 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) & n > 1 \end{cases}$$

Lösung der Teilprobleme

Verbinden der Teillösungen

Rekursionsgleichung

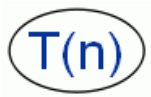
- also existieren Konstanten a und b mit

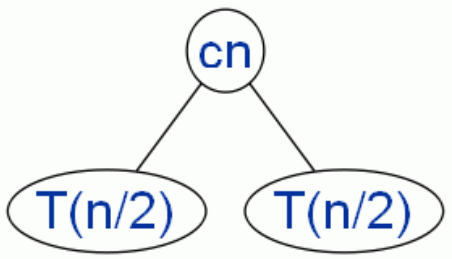
$$T(n) \leq \begin{cases} a & n = 1 \\ 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + b \cdot n & n > 1 \end{cases}$$

- für c = max (a, b) gilt dann

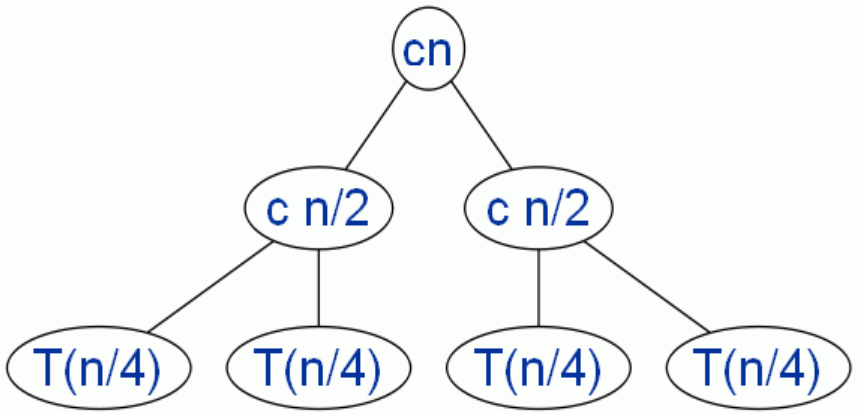
$$T(n) \leq \begin{cases} c & n = 1 \\ 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + c \cdot n & n > 1 \end{cases}$$

Illustration von T(n)



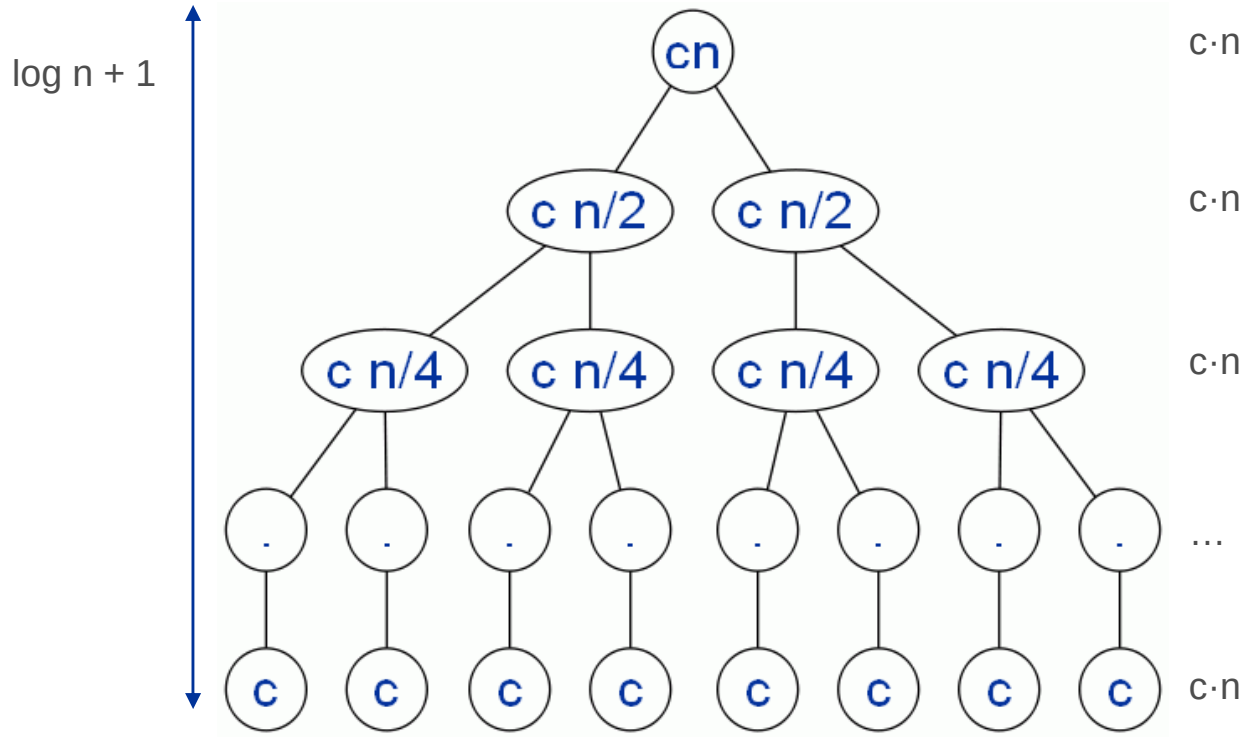


T (n) = 2 T(n/2) + cn



T (n/2) = 2 T(n/4) + c n/2

Illustration von T(n)



Knoten in der i-ten Ebene berücksichtigt n/(2^i) Elemente: Wenn Knoten in der i-te Ebene ein Element berücksichtigt, dann n/(2^i) = 1. Dann n = 2^i, also i = log n

- $T(n) = cn \log n + cn \in \Theta(n \log n)$ (Rekursionsbaum-Methode)

Überblick

- Prinzip
- Maximale Teilsumme
  - erste Lösungsansätze
  - Teile-und-Herrsche-Ansatz
  - Laufzeit
- Rekursionsgleichungen
  - Substitutionsmethode
  - Rekursionsbaum-Methode
  - Mastertheorem
- Produkt von Polynomen nach Karatsuba
- Matrixmultiplikation nach Strassen
- Erstellung eines Spielplans

Rekursionsgleichungen

- beschreiben die Laufzeit bei Rekursionen

Trivialfall für n_0

$$T(n) = \begin{cases} f_0(n) & n = n_0 \\ a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) & n > n_0 \end{cases}$$

Lösung von a Teilproblemen mit reduziertem Aufwand n/b

Verbinden der Teillösungen

- n_0 ist üblicherweise klein, oft ist $f_0(n_0) \in \Theta(1)$
- üblicherweise a>1 und b>1
- Je nach Lösungstechnik wird f_0 vernachlässigt.
- T ist nur für ganzzahlige n/b definiert, was auch gern bei der Lösung vernachlässigt wird.

Substitutionsmethode

- Lösung raten und mit Induktion beweisen
- Beispiel: $$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n & n > 1 \end{cases}$$
- Vermutung: $T(n) = n + n\log n$
- Induktionsanfang für n=1: $T(1) = 1 + 1\log 1 = 1$
- Induktionsschritt von n/2 nach n:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2 \cdot T\left(\tfrac{n}{2}\right) + n \\ &= 2 \cdot \left(\tfrac{n}{2} + \tfrac{n}{2}\log\tfrac{n}{2}\right) + n \qquad \text{Induktionsvoraussetzung} \\ &= 2 \cdot \left(\tfrac{n}{2} + \tfrac{n}{2}(\log n - 1)\right) + n \\ &= n + n\log n - n + n \\ &= n + n\log n \end{aligned}$$

Substitutionsmethode

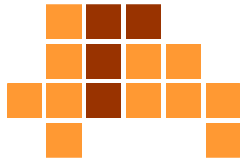
- alternativer Lösungsansatz
- Beispiel: $$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n & n > 1 \end{cases}$$
- Vermutung: $T(n) \in O(n\log n)$
- Lösung: Finde c>0 mit $T(n) \leq c \cdot n \cdot \log n$
- Induktionsschritt von n/2 nach n:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2 \cdot T\left(\tfrac{n}{2}\right) + n \\ &\leq 2 \cdot \left(c \cdot \tfrac{n}{2} \cdot \log\tfrac{n}{2}\right) + n \quad \text{Induktionsvoraussetzung} \\ &= c \cdot n\log n - c \cdot n \cdot \log 2 + n \\ &= c \cdot n\log n - c \cdot n + n \\ &\leq c \cdot n\log n \quad \text{für } c \geq 1 \end{aligned}$$

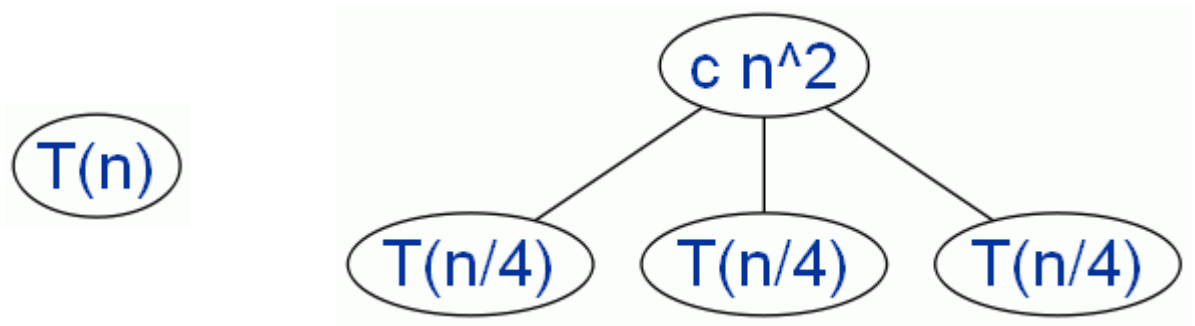
Überblick

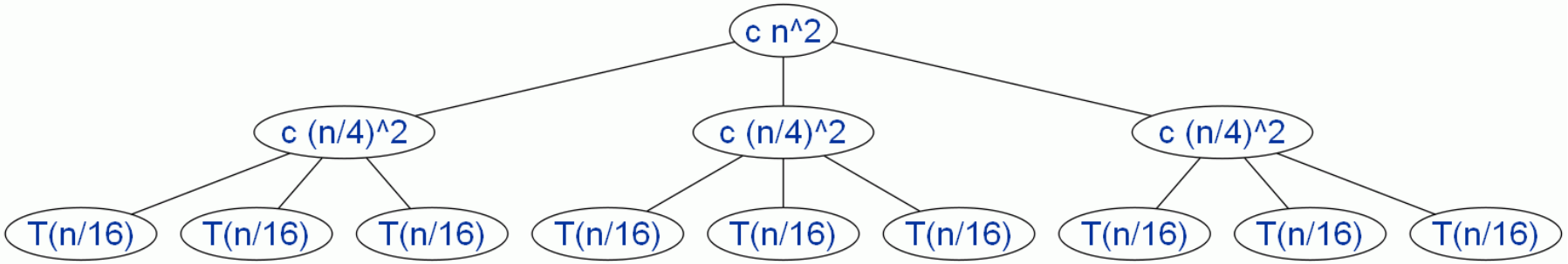
- Prinzip
- Maximale Teilsumme
  - erste Lösungsansätze
  - Teile-und-Herrsche-Ansatz
  - Laufzeit
- Rekursionsgleichungen
  - Substitutionsmethode
  - Rekursionsbaum-Methode
  - Mastertheorem
- Produkt von Polynomen nach Karatsuba
- Matrixmultiplikation nach Strassen
- Erstellung eines Spielplans

Rekursionsbaum-Methode
Beispiel 1

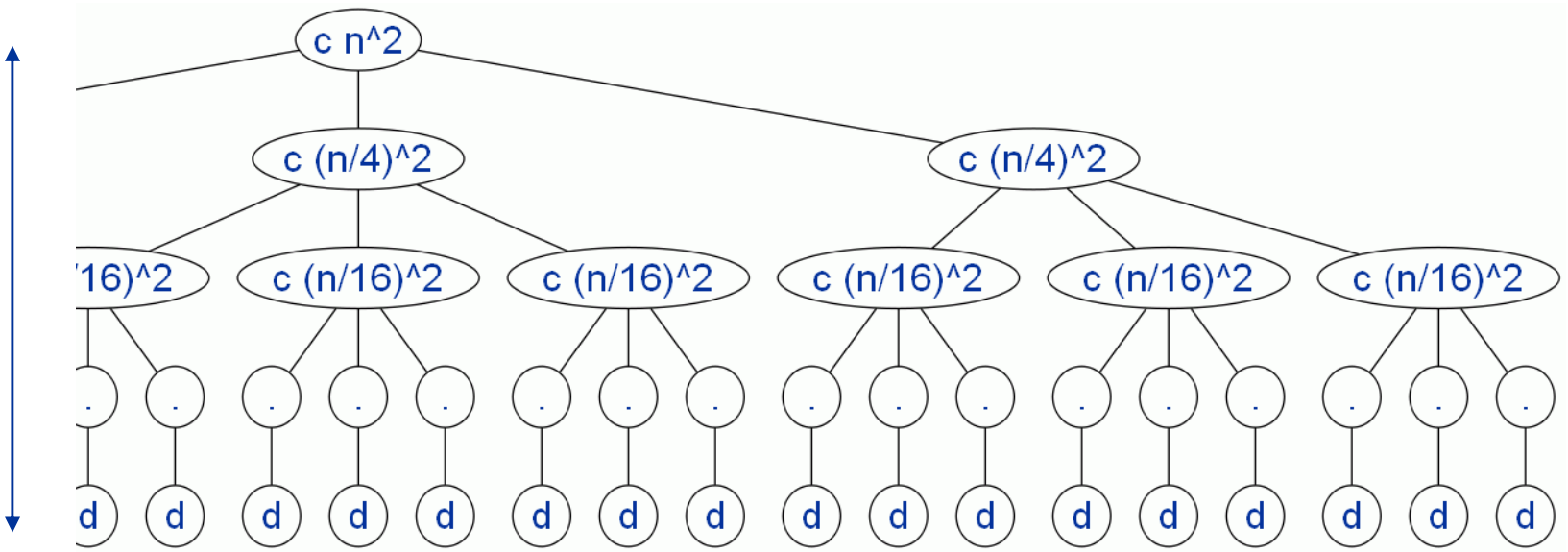


- kann zum Aufstellen von Vermutungen verwendet werden
- Beispiel: $T(n) = 3\,T(n/4) + \Theta(n^2) \leq 3\,T(n/4) + cn^2$





Rekursionsbaum-Methode



$\log_4 n + 1$

wegen $n = 4^{\text{Zahl der Ebenen}}$

$(3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3})$

- $\log_4 3 < 1$ und geometrische Reihe $\Rightarrow T(n) \in O(n^2)$

Nachweis der Vermutung

- Vermutung: $T(n) = 3\,T(n/4) + \Theta(n^2) \leq 3\,T(n/4) + cn^2 \in O(n^2)$
- Substitutionsmethode
- Es existiert ein $d>0$ mit $T(n) < d \cdot n^2$

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq 3 \cdot T\left(\tfrac{n}{4}\right) + c \cdot n^2 \\
&\leq 3d\left(\tfrac{n}{4}\right)^2 + c \cdot n^2 \\
&= \tfrac{3}{16} dn^2 + c \cdot n^2 \\
&\leq dn^2 \qquad \text{für } d \geq (16/13)\, c
\end{aligned}
$$

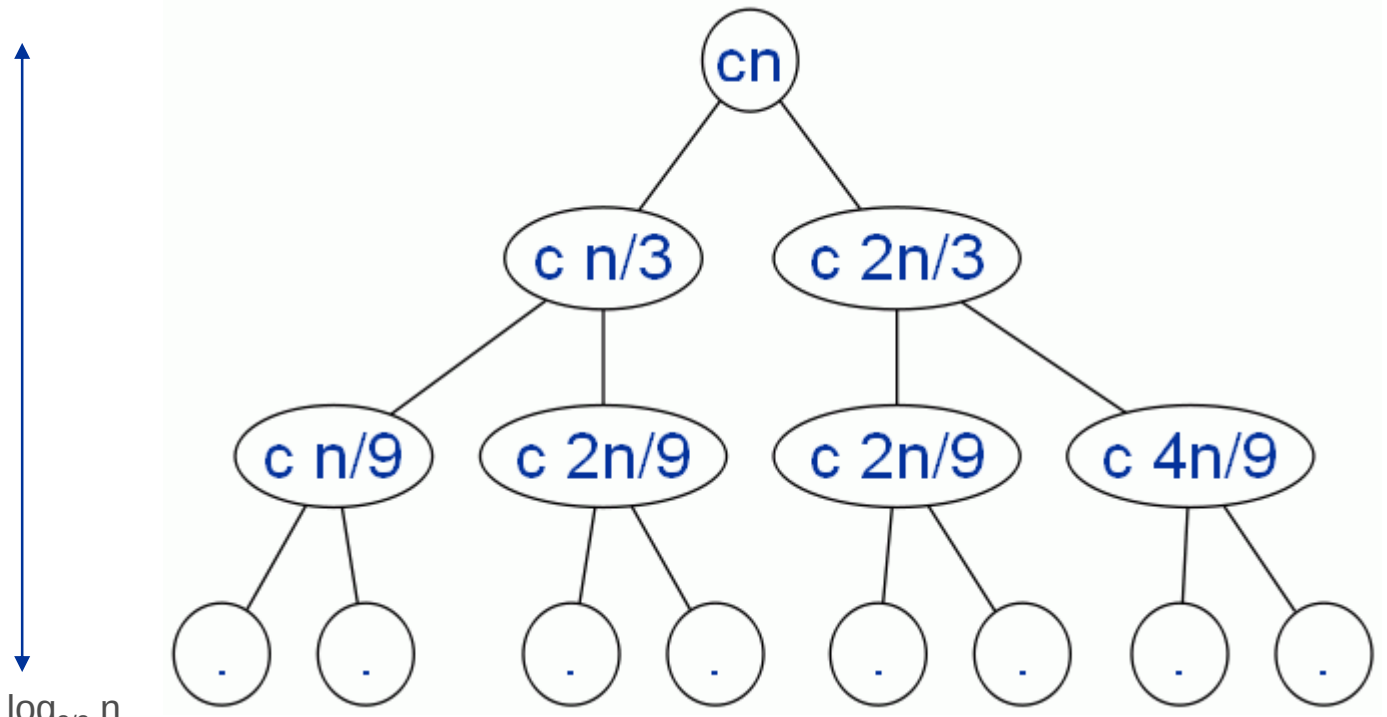
Rekursionsbaum-Methode
Beispiel 2

- kann auch durch iteratives Substituieren realisiert werden
- Beispiel: T(1) = 1, T(2n) = 2 T(n) + 2n
- $n = 2^k$, $k = \log n$

$$
\begin{aligned}
T(2^k) &= 2 \cdot T(2^{k-1}) + 2^k \\
&= 2 \cdot \left(2 \cdot T(2^{k-2}) + 2^{k-1}\right) + 2^k \\
&= 2^2 \cdot T(2^{k-2}) + 2^k + 2^k \\
&= 2^k \cdot T(2^{k-k}) + 2^k + \ldots + 2^k \\
&\qquad n \qquad\quad T(1) = 1 \qquad\qquad k \cdot 2^k = n \log n \\
&= n + n\log n \\
&\in n\log n
\end{aligned}
$$

Rekursionsbaum-Methode Beispiel 3

- liefert manchmal zu pessimistische Ergebnisse
- T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + O(n)



c·n

c·n

c·n

$\log_{3/2} n$

wegen $(2/3)^k n = 1$

Vermutung:
O (n log n)

Rekursionsbaum-Methode

- Aber! In Ebene $\log_{3/2} n$ existieren maximal $2^{\log_{3/2} n} = n^{\log_{3/2} 2}$ Blätter mit $\log_{3/2} 2 > 1$.
- Konstante Kosten pro Blatt führen zu $\Theta(n^{\log_{3/2} 2}) \in \omega(n \log n)$ Kosten für die Blätter und damit $T(n) \notin O(n \log n)$.
- Allerdings:
  - Baum hat tatsächlich weniger Blätter.
  - In tieferen Ebenen fehlen innere Knoten, sodass die Kosten pro Ebene kleiner als $c \cdot n$ sind.
- Motiviert durch diese Überlegungen lässt sich $T(n) \in O(n \log n)$ zeigen.

Nachweis der Vermutung

- Vermutung: T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + O(n) ∈ O(n log n)
- Substitutionsmethode
- Es existiert ein d>0 mit T(n) < d·n·log n

$$
\begin{aligned}
T(n) &\leq T\left(\tfrac{n}{3}\right) + T\left(\tfrac{2n}{3}\right) + c \cdot n \\
&\leq d\tfrac{n}{3}\log\tfrac{n}{3} + d\tfrac{2n}{3}\log\tfrac{2n}{3} + c \cdot n \\
&= d\tfrac{n}{3}\log n - d\tfrac{n}{3}\log 3 + d\tfrac{2n}{3}\log n - 2d\tfrac{n}{3}\log\tfrac{3}{2} + c \cdot n \\
&= dn\log n - dn\left(\log 3 - \tfrac{2}{3}\right) + c \cdot n \\
&\leq dn\log n \qquad d \geq c/(\log 3 - (2/3))
\end{aligned}
$$

Überblick

- Prinzip
- Maximale Teilsumme
  - erste Lösungsansätze
  - Teile-und-Herrsche-Ansatz
  - Laufzeit
- Rekursionsgleichungen
  - Substitutionsmethode
  - Rekursionsbaum-Methode
  - Mastertheorem
- Produkt von Polynomen nach Karatsuba
- Matrixmultiplikation nach Strassen
- Erstellung eines Spielplans

Mastertheorem

- Lösungsansatz für Rekursionsgleichungen der Form

  $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$ mit $a \geq 1$ und $b > 1$

- $T(n)$ beschreibt die Laufzeit eines Algorithmus,
  - der ein Problem der Größe n in a Teilprobleme zerlegt,
  - der jedes der a Teilprobleme rekursiv mit der Laufzeit $T(n/b)$ löst,
  - der $f(n)$ Schritte benötigt, um die a Teillösungen zusammenzusetzen.

Mastertheorem

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- Fall 1: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ falls $f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \epsilon}\right)$ $\epsilon > 0$
- Fall 2: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \log n\right)$ falls $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$
- Fall 3: $T(n) \in \Theta\left(f(n)\right)$ falls $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a + \epsilon}\right)$ $\epsilon > 0$

  $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ $0 < c < 1$

  $n > n_0$

Beispiele

- Fall 1: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ falls $f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \epsilon}\right)$ $\epsilon > 0$

- $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + 1000n^2$

  $a = 8, \quad b = 2, \quad f(n) = 1000n^2, \quad \log_b a = \log_2 8 = 3$

  $f(n) \in O\left(n^{\log_2 8 - 1}\right) \rightarrow T(n) \in \Theta(n^3)$

- $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + 17n$

  $a = 9, \quad b = 3, \quad f(n) = 17n, \quad \log_b a = \log_3 9 = 2$

  $f(n) \in O\left(n^{\log_3 9 - 1}\right) \rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$

Beispiele

- Fall 2: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a} \log n\right)$ falls $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 10n$

  $a = 2, \quad b = 2, \quad f(n) = 10n, \quad \log_b a = \log_2 2 = 1$

  $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_2 2}\right) \rightarrow T(n) \in \Theta(n \log n)$

- $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$

  $a = 1, \quad b = \frac{3}{2}, \quad f(n) = 1, \quad \log_b a = \log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$

  $f(n) \in \Theta\left(n^{\log_{\frac{3}{2}} 1}\right) \rightarrow T(n) \in \Theta(n^0 \log n) = \Theta(\log n)$

Beispiele

- Fall 3: $T(n) \in \Theta\left(f(n)\right)$ falls $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a+\epsilon}\right) \quad \epsilon > 0$

  $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n) \;\; 0 < c < 1$

- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

  $a = 2, \quad b = 2, \quad f(n) = n^2, \quad \log_b a = \log_2 2 = 1$

  $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_2 2+1}\right)$

  $2\left(\frac{n}{2}\right)^2 \leq c \cdot n^2 \quad \frac{1}{2}n^2 \leq c \cdot n^2 \quad c = \frac{1}{2}$

  $T(n) \in \Theta\left(n^2\right)$

Master-Theorem

- lässt sich nicht immer anwenden

- $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n\log n$

  $a = 2, \quad b = 2, \quad f(n) = n\log n, \quad \log_b a = \log_2 2 = 1$

- Fall 1: $f(n) \notin O\left(n^{\log_2 2 - \epsilon}\right)$
- Fall 2: $f(n) \notin \Theta\left(n^{\log_2 2}\right)$
- Fall 3: $f(n) \notin \Omega\left(n^{\log_2 2 + \epsilon}\right)$

  n log n ist asymptotisch größer als n,
  aber nicht polynomial größer

Überblick

- Prinzip
- Maximale Teilsumme
  - erste Lösungsansätze
  - Teile-und-Herrsche-Ansatz
  - Laufzeit
- Rekursionsgleichungen
  - Substitutionsmethode
  - Rekursionsbaum-Methode
  - Mastertheorem
- Produkt von Polynomen nach Karatsuba
- Matrixmultiplikation nach Strassen
- Erstellung eines Spielplans

Produkt von Polynomen

- Gegeben: Polynome von Grad 2n-1, 2n = 2^k Koeffizienten

$$a(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_{2n-1} x^{2n-1}$$

$$b(x) = b_0 x^0 + b_1 x^1 + \ldots + b_{2n-1} x^{2n-1}$$

- Gesucht: $c(x) = a(x) \cdot b(x)$

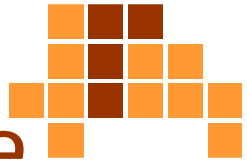
$$\begin{aligned} &= x^0 \cdot (a_0 b_0) \\ &+ x^1 \cdot (a_1 b_0 + a_0 b_1) \\ &+ x^2 \cdot (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) \\ &+ \ldots \\ &+ x^{4n-2} \cdot (a_{2n-1} b_{2n-1}) \end{aligned}$$

Polynome können gegebenenfalls mit Nullen bis zum Grad 2n-1 aufgefüllt werden.

Produkt von Polynomen

- Naive Implementierung benötigt $\Omega(n^2)$ Grundoperationen. Jeder Koeffizient von a wird mit jedem Koeffizient von b multipliziert: 2n·2n Multiplikationen + ? Additionen
- Karatsuba-Algorithmus von 1960 benötigt $O(n^{\log_2 3})$ Grundoperationen.
  (Anatolii Alexeevich Karatsuba, Mathematische Fakultät, Lomonosov Universität Moskau)
- Anwendung: Multiplikation langer Zahlen

Idee 1
Zerlegung in zwei kleinere Polynome



- Zerlege das Problem in Teilprobleme halber Größe.
- Kombiniere die gelösten Teilprobleme zur Gesamtlösung.
- Beispiel:

$$a = 7x^0 + 3x^1 + 2x^2 + 6x^3$$
$$b = 5x^0 + 2x^1 + 4x^2 + 8x^3$$

Polynome mit 2n Koeffizienten

$$a = 7x^0 + 3x^1 + x^2(2x^0 + 6x^1) = a_l + x^2 a_h$$
$$b = 5x^0 + 2x^1 + x^2(4x^0 + 8x^1) = b_l + x^2 b_h$$

Zerlegung in 2 Polynome mit n Koeffizienten

$$c = a \cdot b = (a_l + x^2 a_h) \cdot (b_l + x^2 b_h)$$
$$= a_l \cdot b_l + x^2(a_l \cdot b_h + a_h \cdot b_l) + x^4(a_h \cdot b_h)$$

Kombiniere 4 Produkte von Polynomen mit n Koeffizienten
zur Lösung des Produkts von Polynomen mit 2n Koeffizienten.

Laufzeit

- $T(2n) = 4T(n) + O(n) \rightarrow T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$

  $a = 4, \quad b = 2, \quad f(n) = O(n), \quad \log_b a = \log_2 4 = 2$

- Fall 1 des Mastertheorem: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

  falls $f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \epsilon}\right) \;\; \epsilon > 0$

  $f(n) \in O\left(n^{\log_2 4 - 1}\right) \rightarrow T(n) \in \Theta(n^2)$

- Die Umwandlung des Problems in vier Teilprobleme halber Größe führt nicht zur Effizienzsteigerung.

Idee 2 - Wiederverwendung berechneter Produkte

$$c = a \cdot b = (a_l + x^n a_h) \cdot (b_l + x^n b_h)$$
$$= a_l \cdot b_l + x^n (a_l \cdot b_h + a_h \cdot b_l) + x^{2n} (a_h \cdot b_h)$$

A C B

$$(a_l + a_h) \cdot (b_l + b_h) = a_l \cdot b_l + a_l \cdot b_h + a_h \cdot b_l + a_h \cdot b_h$$
$$a_l \cdot b_h + a_h \cdot b_l = (a_l + a_h) \cdot (b_l + b_h) - a_l \cdot b_l - a_h \cdot b_h$$

effiziente Formulierung von C unter Verwendung von A und B

$$A = a_l \cdot b_l$$
$$B = a_h \cdot b_h$$
$$C = (a_l + a_h) \cdot (b_l + b_h)$$
$$c = A + x^n (C - A - B) + x^{2n} B$$

3 Produkte von Polynomen mit n Koeffizienten

Laufzeit

- $T(2n) = 3T(n) + O(n) \rightarrow T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$

  $a_l + a_h$ liegt in O(n)

  $a = 3, \quad b = 2, \quad f(n) = O(n), \quad \log_b a = \log_2 3 \approx 1,585$

- Fall 1 des Mastertheorem: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

  falls $f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \epsilon}\right) \;\; \epsilon > 0$

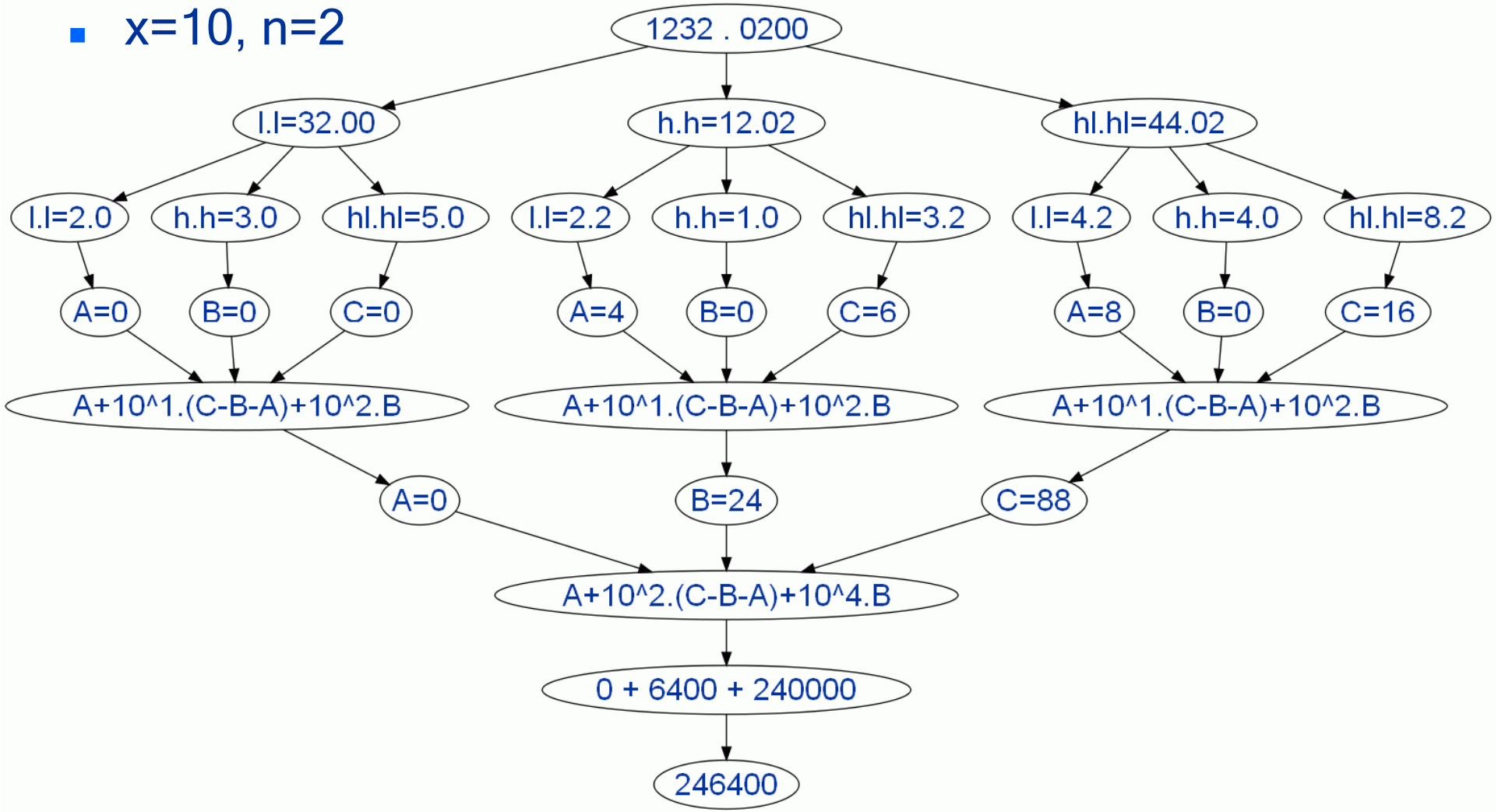
  $f(n) \in O\left(n^{1,585-0,585}\right) \rightarrow T(n) \in \Theta(n^{1,585})$

- Die Umwandlung des Problems in drei Teilprobleme halber Größe bei linearem Aufwand für die Kombination der Teilergebnisse führt zur Effizienzsteigerung.

Pseudocode

```
procedure karatsuba (a, b, n)
{
    if (n<d) multiply (a, b);

    al = lowCoefficients (a);
    ah = highCoefficients (a);
    bl = lowCoefficients (b);
    bh = highCoefficients (b);

    A = karatsuba (al, bl, n/2);
    B = karatsuba (ah, bh, n/2);
    C = karatsuba (al+ah, bl+bh, n/2);

    return A + shift(C-A-B,n) + shift(B,2*n);
}
```

Beispiel



- x=10, n=2

Java-Beispiel für Multiplikation von Binärzahlen

```
public static BigInteger karatsuba (BigInteger x, BigInteger y)
{
   int n=Math.max(x.bitLength(),y.bitLength())/2+1;

   if (n<=1500) return x.multiply (y);

   BigInteger xH = x.shiftRight (n);
   BigInteger xL = x.subtract (xH.shiftLeft(n));
   BigInteger yH = y.shiftRight (n);
   BigInteger yL = y.subtract (yH.shiftLeft(n));

   BigInteger A = karatsuba (xL, yL);
   BigInteger B = karatsuba (xH, yH);
   BigInteger C = karatsuba (xL.add (xH), yL.add (yH));

   BigInteger result = A;
   result = result.add (B.shiftLeft(2*n));
   C = C.subtract(A); C = C.subtract(B); C = C.shiftLeft(n);
   result = result.add (C);

   return result;
}
```

stellt sicher, dass bei x und y jeweils 2n Bit berücksichtigt werden.

Trivialfall

Wikipedia: Karatsuba-Algorithmus

```
import java.math.BigInteger; // ganze Zahlen beliebiger Größe (nicht auf 64 Bit beschränkt)
```

Shift-Operationen

	n Bit	n Bit	
	xH … xH	xL … xL	x

- `BigInteger xH = x.shiftRight (n);`

	0 … 0	xH … xH	xH

- `BigInteger xL = x.subtract (xH.shiftLeft(n));`

	xH … xH	xL … xL	x
-	xH … xH	0 … 0	xH.shiftLeft (n)
=	0 … 0	xL … xL	xL

Überblick

- Prinzip
- Maximale Teilsumme
  - erste Lösungsansätze
  - Teile-und-Herrsche-Ansatz
  - Laufzeit
- Rekursionsgleichungen
  - Substitutionsmethode
  - Rekursionsbaum-Methode
  - Mastertheorem
- Produkt von Polynomen nach Karatsuba
- Matrixmultiplikation nach Strassen
- Erstellung eines Spielplans

Matrix-Multiplikation

- Matrix A mit l Zeilen und m Spalten

$$A = (a_{ij})_{i=1\ldots l, j=1\ldots m}$$

- Matrix B mit m Zeilen und n Spalten

$$B = (b_{ij})_{i=1\ldots m, j=1\ldots n}$$

- Produkt C = AB ist eine Matrix mit l Zeilen und n Spalten

$$C = A \cdot B = (c_{ij})_{i=1\ldots l, j=1\ldots n}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

- Element der Zeile i und Spalte j ergibt sich aus dem Skalarprodukt der Zeile i von A und der Spalte j von B.
- Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B
- nicht kommutativ

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 0 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ 39 & 32 \end{pmatrix}$$

Pseudocode - Multiplikation quadratischer Matrizen der Größe n

```
procedure matrixMultiplikation (a, b, n)
{
O(n)    for i=1 to n do
O(n²)       for j=1 to n do
            {
O(1)            c[i][j] = 0;
O(n³)           for k=1 to n do
O(1)                c[i][j]=c[i][j]+a[i][k]*b[k][j];
            }
O(1)    return c;
}
```

Laufzeit $\in$ $O(n^3)$

Java-Implementierung

```
public class MatrixMultiplikation {
   public static void main(String[] args) {
   }

   public int[][] matrixMultiplikation(int[][] a, int[][] b, int n){

      int[][] c = new int[n][n];

      for (int i = 0; i < n; i++) {
         for (int j = 0; j < n; j++) {
            c[i][j] = 0;
            for (int k = 0 ; k < n; k++) {
               c[i][j] = c[i][j] + a[i][k] * b[k][j];
            }
         }
      }
   return c;
   }
}
```

Idee 1
Zerlegung in vier Blöcke

- Zerlege das Problem in Teilprobleme halber Größe.
- Kombiniere die gelösten Teilprobleme zur Gesamtlösung.
- Quadratische Matrizen der Größe $2n = 2^k$:

$$\underset{2n \times 2n}{A \cdot B} = \begin{pmatrix} \overset{n \times n}{A_1} & \overset{n \times n}{A_2} \\ \underset{n \times n}{A_3} & \underset{n \times n}{A_4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

Zerlegung in 4 Matrizen mit n x n Elementen

$$= \begin{pmatrix} A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_3 & A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_4 \\ A_3 \cdot B_1 + A_4 \cdot B_3 & A_3 \cdot B_2 + A_4 \cdot B_4 \end{pmatrix}$$

Kombiniere 8 Produkte von Matrizen mit n x n Elementen
zur Lösung des Produkts von Matrizen mit 2n x 2n Elementen.

Laufzeit

- $T(2n) = 8T(n) + O(n^2) \rightarrow T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2)$

  $a = 8, \quad b = 2, \quad f(n) = O(n^2), \quad \log_b a = \log_2 8 = 3$

- Fall 1 des Mastertheorem: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

  falls $f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \epsilon}\right) \;\; \epsilon > 0$

  $f(n) \in O\left(n^{\log_2 8 - 1}\right) \rightarrow T(n) \in \Theta(n^3)$

- Und wieder nichts gewonnen.

Idee 2
Weniger Produkte berechnen

- Strassen-Algorithmus (1969)

  Prof. em. Dr. Volker Strassen, Fak. für Mathematik und Informatik, Universität Konstanz

$$P_1 = A_1 \cdot (B_2 - B_4)$$
$$P_2 = (A_1 + A_2) \cdot B_4$$
$$P_3 = (A_3 + A_4) \cdot B_1$$
$$P_4 = A_4 \cdot (B_3 - B_1)$$
$$P_5 = (A_1 + A_4) \cdot (B_1 + B_4)$$
$$P_6 = (A_2 - A_4) \cdot (B_3 + B_4)$$
$$P_7 = (A_1 - A_3) \cdot (B_1 + B_2)$$

7 Produkte von Matrizen mit n x n Elementen.
Additionen sind lediglich $O(n^2)$.

Idee 2
Weniger Produkte berechnen

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

8 Produkte

$$= \begin{pmatrix} A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_3 & A_1 \cdot B_2 + A_2 \cdot B_4 \\ A_3 \cdot B_1 + A_4 \cdot B_3 & A_3 \cdot B_2 + A_4 \cdot B_4 \end{pmatrix}$$

7 Produkte

$$= \begin{pmatrix} P_5 + P_4 - P_2 + P_6 & P_1 + P_2 \\ P_3 + P_4 & P_5 + P_1 - P_3 - P_7 \end{pmatrix}$$

Additionen sind lediglich $O(n^2)$

Laufzeit

- $T(2n) = 7T(n) + O(n^2) \rightarrow T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2)$

  $a = 7, \quad b = 2, \quad f(n) = O(n^2), \quad \log_b a = \log_2 7 \approx 2,807$

- Fall 1 des Mastertheorem: $T(n) \in \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

  falls $f(n) \in O\left(n^{\log_b a - \epsilon}\right) \;\; \epsilon > 0$

  $f(n) \in O\left(n^{2,807-0,807}\right) \rightarrow T(n) \in \Theta(n^{2,807})$

- Die Umwandlung des Problems in sieben Teilprobleme halber Größe bei quadratischem Aufwand für die Kombination der Teilergebnisse führt zur Effizienzsteigerung.

Der geringe Unterschied zwischen $O(n^3)$ und $O(n^{2,807})$ bei gleichzeitig größeren Faktoren bei den Operationen mit quadratischem Aufwand führt erst bei sehr großen Matrizen zu Laufzeitverbesserungen.

Überblick

- Prinzip
- Maximale Teilsumme
  - erste Lösungsansätze
  - Teile-und-Herrsche-Ansatz
  - Laufzeit
- Rekursionsgleichungen
  - Substitutionsmethode
  - Rekursionsbaum-Methode
  - Mastertheorem
- Produkt von Polynomen nach Karatsuba
- Matrixmultiplikation nach Strassen
- Erstellung eines Spielplans

Spielplan für ein Turnier

- $n = 2^k$ Spieler
- jeder spielt gegen jeden
- jeder soll nur einmal pro Tag spielen
  $\Rightarrow$ Turnier dauert n-1 Tage
- Beispiel: T_2 (2^2 Spieler)

	Tag 1	Tag 2	Tag 3
Spieler 1	2	3	4
Spieler 2	1	4	3
Spieler 3	4	1	2
Spieler 4	3	2	1

Rekursiver Aufbau

- T_{k+1} kann aus T_k konstruiert werden.
- T_k besteht aus $n=2^k$ Zeilen und n-1 Spalten
- T_{k+1} besteht aus $2n=2^{k+1}$ Zeilen und n-1+n Spalten

$$\underset{2n \times 2n-1}{T_{k+1}} = \begin{pmatrix} \overset{n \times n-1}{T_k} & \overset{n \times n}{S_k} \\ \underset{n \times n-1}{U_k} & \underset{n \times n}{Z_k} \end{pmatrix}$$

- $U_k = T_k + n$, zu jedem Element in T_k wird n addiert
- S_k, Elemente sind n+1 … 2n,
  zyklisches Verschieben in den Spalten
- Z_k, Elemente sind 1 … n,
  zyklisches Verschieben in den Zeilen

Beispiel

$$T_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad U_2 = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 \\ 8 & 5 & 6 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad Z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} T_2 & S_2 \\ U_2 & Z_2 \end{pmatrix}$$

Problem wird in ein Teilproblem halber Größe zerlegt. Zusammenfügen zur Gesamtlösung liegt in $O(n^2)$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Trivialfall: 2^1 Spieler liegt in $O(1)$

Laufzeit

- Fall 3: $T(n) \in \Theta\left(f(n)\right)$ falls $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_b a+\epsilon}\right) \quad \epsilon > 0$

  $$af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n) \;\; 0 < c < 1$$

- $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2)$

  $a = 1, \quad b = 2, \quad f(n) = O(n^2), \quad \log_b a = \log_2 1 = 0$

  $f(n) \in \Omega\left(n^{\log_2 1+2}\right)$

  $2 \cdot d \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2 \leq c \cdot d \cdot n^2 \quad \frac{1}{2}n^2 \leq c \cdot n^2 \quad c = \frac{1}{2}$

  $T(n) \in \Theta\left(n^2\right)$

Überblick

- Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Teile das Gesamtproblem in kleinere Teilprobleme auf.
- Herrsche über die Teilprobleme durch rekursives Lösen. Wenn die Teilprobleme klein sind, löse sie direkt.
- Verbinde die Lösungen der Teilprobleme zur Lösung des Gesamtproblems.

- rekursive Anwendung des Algorithmus auf immer kleiner werdende Teilprobleme
- direkte Lösung eines hinreichend kleinen Teilproblems

Zusammenfassung

- kann bei konzeptionell schwierigen Problemen hilfreich sein
  - Lösung für den Trivialfall muss bekannt sein
  - Aufteilung in Teilprobleme muss möglich sein
  - Kombination der Teillösungen muss möglich sein
- kann effiziente Lösungen realisieren
  - wenn die Lösung des Trivialfalls in O(1) liegt, Aufteilung in Teilprobleme und Kombination der Teillösungen in O(n) liegt und die Zahl der Teilprobleme beschränkt ist, liegt der Algorithmus in O(n log n)
- für Parallelverarbeitung geeignet
  - Teilprobleme werden unabhängig voneinander verarbeitet

Zusammenfassung

- Definition des Trivialfalls
  - Möglichst kleine direkt zu lösende Teilprobleme sind elegant und einfach.
  - Andererseits wird die Effizienz verbessert, wenn schon relativ große Teilprobleme direkt gelöst werden.
  - Rekursionstiefe sollte nicht zu groß werden.
- Aufteilung in Teilprobleme
  - Wahl der Anzahl der Teilprobleme und konkrete Aufteilung kann anspruchsvoll sein.
- Kombination der Teillösungen
  - typischerweise konzeptionell anspruchsvoll

Zusammenfassung

- Laufzeitabschätzung durch Lösen von Rekursionsgleichungen

Trivialfall für n_0

$$T(n) = \begin{cases} f_0(n) & n = n_0 \\ a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) & n > n_0 \end{cases}$$

Lösung von a Teilproblemen mit reduziertem Aufwand n/b

Verbinden der Teillösungen

- Substitutionsmethode
- Rekursionsbaum-Methode
- Mastertheorem

Nächstes Thema

- weitere Entwurfstechniken für Algorithmen