Algorithmen und Datenstrukturen
Weitere Entwurfsmuster

Matthias Teschner
Graphische Datenverarbeitung
Institut für Informatik
Universität Freiburg

SS 12

Lernziele der Vorlesung

- Algorithmen
  - Sortieren, Suchen, Optimieren
- Datenstrukturen
  - Repräsentation von Daten
  - Listen, Stapel, Schlangen, Bäume
- Techniken zum Entwurf von Algorithmen
  - Algorithmenmuster
  - Greedy, Backtracking, Divide-and-Conquer
- Analyse von Algorithmen
  - Korrektheit, Effizienz

Überblick

- Teile und Herrsche
- Backtracking
- Greedy
- Dynamische Programmierung
- Vollständige Aufzählung
- Sweep-Verfahren

Prinzip

- Versuch-und-Irrtum-Prinzip (trial and error)
- Erreichte Teillösung wird schrittweise zur Gesamtlösung ausgebaut.
- Bewertungsfunktion prüft Gültigkeit eines Schrittes.
- Wenn klar ist, daß Teillösung nicht zur Gesamtlösung führt, können Schritte rückgängig gemacht werden und Alternativen getestet werden.
- Tiefensuche
- oft rekursiv implementiert

Prinzip

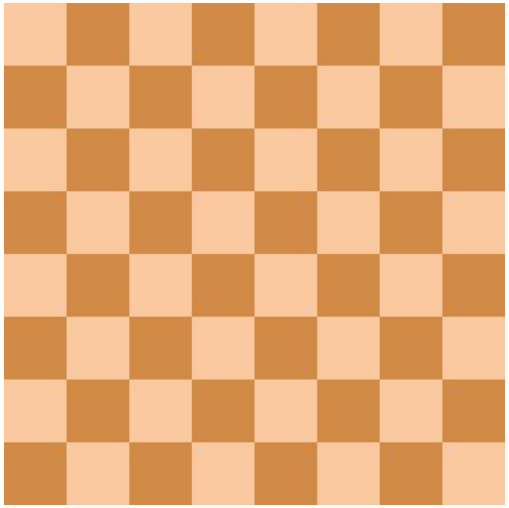
```
FindeLoesung (Stufe, Lösungsvektor)

   while (es existieren noch Teil-Lösungsschritte)
   begin
      wähle einen Teil-Lösungsschritt;
      if (gültiger Teil-Lösungsschritt) then
      begin
         erweitere Lösungsvektor um
         gewählten Teil-Lösungsschritt;
         if (Lösungsvektor vollständig) then
            return true;
         else
            if (FindeLoesung(Stufe+1, Lösungsvektor)) then
               return true;
            else
               mache Teil-Lösungsschritt rückgängig;
      end
   end
   return false;
```

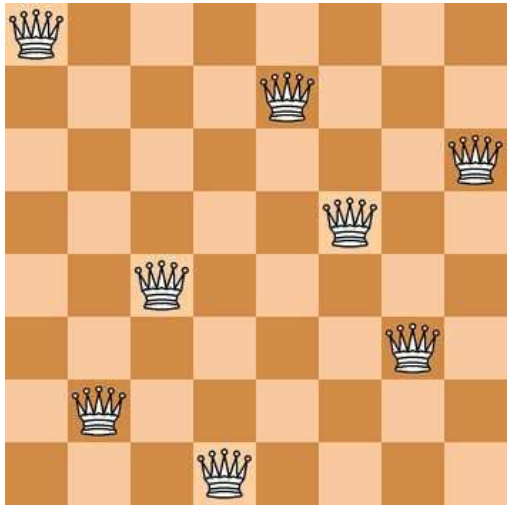
www.wikipedia.de / Backtracking

n-Damen-Problem

- Platziere n Damen, die sich nicht gegenseitig bedrohen
  - maximal eine Dame pro Zeile
  - maximal eine Dame pro Spalte
  - maximal eine Dame pro Diagonale
  - Es können maximal n Damen auf einem n x n - Feld platziert werden.



8x8 - Feld

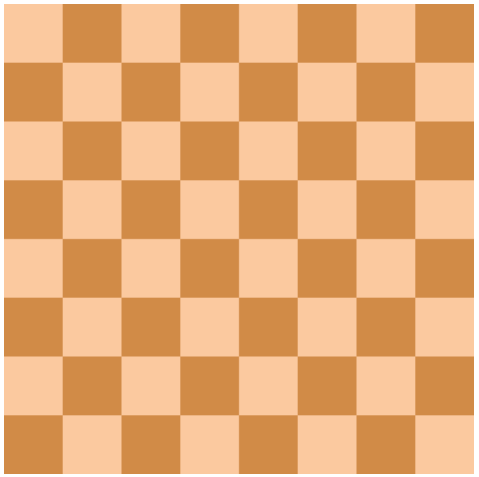


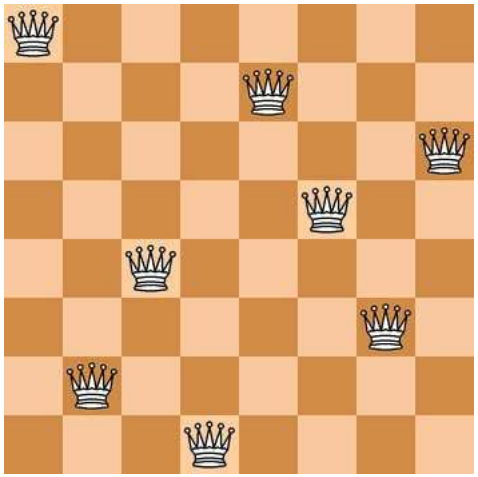
eine Lösung

www.wikipedia.de

Lösungsprinzip

- Backtracking
  - platziere schrittweise Damen, die sich nicht bedrohen
  - wenn keine weitere Dame platziert werden kann,
    mache den letzten Schritt rückgängig
- Effizienzsteigerung
  - nutze aus, dass pro Zeile nur eine Dame platziert werden kann





www.wikipedia.de

Implementierung

```
platziereDameInZeile (brett, zeile)
   if (zeile > n) then
   begin
      druckeErgebnis(brett);
      exit;
   end;
   else
   begin
      for spalte=1 to n do
      begin
         if (!dameIstBedrohtAuf(brett, zeile, spalte))
         begin
            setzeDame(brett, zeile, spalte);
            platziereDameInZeile (brett, zeile+1);
            entferneDame(brett, zeile, spalte);
         end
      end
      return false;
   end

// Aufruf
initialisiere(brett);
platziereDameInZeile (brett, 1);
```

bereits n Damen platziert, Programmende.

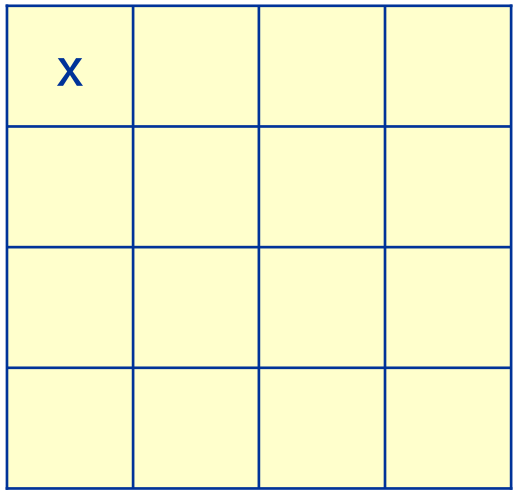
← Hier kommen wir an, wenn eine Platzierung in zeile+1 nicht möglich war.

Platzierung in zeile nicht möglich

www.stefan-baur.de/cs.algo.8queens.html
(mit Java-Implementierung)

Illustration

- `platziereDameInZeile(brett, 1);`



Illustration

- `platziereDameInZeile(brett, 1);`
- `platziereDameInZeile(brett, 2);`

x			
		x	

Illustration

- `platziereDameInZeile(brett, 1);`
- `platziereDameInZeile(brett, 2);`
- `platziereDameInZeile(brett, 3);`
  - `return false`

x			
		x	

Illustration

- `platziereDameInZeile(brett, 1);`
- `platziereDameInZeile(brett, 2);`
- `platziereDameInZeile(brett, 3);`
  - `return false`
- `entferneDame(brett, 2, 3);`
- `setzeDame(brett, 2, 4);`

x			
		x	x

Illustration

- `platziereDameInZeile(brett, 1);`
- `platziereDameInZeile(brett, 2);`
- `platziereDameInZeile(brett, 3);`
  - `return false`
- `entferneDame(brett, 2, 3);`
- `setzeDame(brett, 2, 4);`
- `platziereDameInZeile(brett, 3);`

x			
			x
	x		

Illustration

- `platziereDameInZeile(brett, 1);`
- `platziereDameInZeile(brett, 2);`
- `platziereDameInZeile(brett, 3);`
  - `return false`
- `entferneDame(brett, 2, 3);`
- `setzeDame(brett, 2, 4);`
- `platziereDameInZeile(brett, 3);`
- `platziereDameInZeile(brett, 4);`
  - `return false`

x			
			x
	x		

Illustration

- `platziereDameInZeile(brett, 1);`
- `platziereDameInZeile(brett, 2);`
- `platziereDameInZeile(brett, 3);`
  - `return false;`
- `entferneDame(brett, 2, 3);`
- `setzeDame(brett, 2, 4);`
- `platziereDameInZeile(brett, 3);`
- `platziereDameInZeile(brett, 4);`
  - `return false;`
- `entferneDame(brett, 3, 2);`
- `return false;`

x			
			x
	x		

Illustration

- `platziereDameInZeile(brett, 1);`
- `platziereDameInZeile(brett, 2);`
- `platziereDameInZeile(brett, 3);`
  - `return false;`
- `entferneDame(brett, 2, 3);`
- `setzeDame(brett, 2, 4);`
- `platziereDameInZeile(brett, 3);`
- `platziereDameInZeile(brett, 4);`
  - `return false;`
- `entferneDame(brett, 3, 2);`
- `return false;`
- `entferneDame(brett, 2, 4);`
- `return false;`

x			
			x

n-Damen-Problem
Lösungen

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Lösungen	1	0	0	2	10	4	40	92	352	724

- n = 25, ≈2.200.000.000.000.000 Lösungen

Backtracking - Laufzeit

- m Möglichkeiten, eine Teillösung zu erweitern
- n Elemente der Lösung
- $m + m^2 + \ldots + m^n$ mögliche Zustände

  m Möglichkeiten für den ersten Schritt der Teillösung
  m^2 Möglichkeiten für die ersten zwei Schritte der Teillösung
  m^n Möglichkeiten für alle n Schritte der Teillösung

- exponentielle Laufzeit

Überblick

- Teile und Herrsche
- Backtracking
- Greedy
- Dynamische Programmierung
- Vollständige Aufzählung
- Sweep-Verfahren

Prinzip

- Wähle schrittweise den Folgezustand, der aktuell (lokal) den größten Zugewinn verspricht.
- Eine Bewertungsfunktion muss existieren, um aus möglichen Folgezuständen den optimalen zu ermitteln.
- Schritte werden nicht rückgängig gemacht.
- einfach zu realisieren
- löst viele Probleme nicht optimal (lokales Optimum statt globales Optimum)
- löst eventuell Probleme nicht in optimaler Zahl von Schritten, z. B. Gradientenabstiegsverfahren im Vergleich zu konjugierten Gradienten

Münzwechsel-Problem

- Eingabe: Menge von Münzwerten, Betrag W
- Ausgabe: Folge von Münzwerten mit Summe W mit minimaler Länge
- Algorithmus:

```
Betrag W ≥ 0;
Ergebnismenge = ∅;
Wähle B = Wert der größten Münze;
while W > 0 do
begin
   while B ≤ W do
   begin
      W = W – B;
      füge B zur Ergebnismenge hinzu;
   end;
   B = Münze kleiner als B (nächstkleinere Münze);
end;
return Ergebnismenge;
```

Beispiel

- Münzen: 1, 5, 10, 20, 50, 100, 200
- Wert 147
- 147>0, 200>147 $\rightarrow$ nächstkleinere Münze 100
- 147>0, 100$\leq$147 $\rightarrow$ Wert=47, Ergebnismenge = {100}
- 47>0, 100>47 $\rightarrow$ nächstkleinere Münze 50
- …
- Ergebnismenge = {100, 20, 20, 5, 1, 1}

- $147 \underset{100}{\rightarrow} 47 \underset{20}{\rightarrow} 27 \underset{20}{\rightarrow} 7 \underset{5}{\rightarrow} 2 \underset{1}{\rightarrow} 1 \underset{1}{\rightarrow} 0$

Optimalität

- ist bei Greedy aufgrund der Lokalität der Entscheidung nicht immer gegeben
- Beispiel: Münzwerte: 41, 20, 1, Wert W=60
  Greedy-Lösung: 60 = 41 + 19·1 (20 Münzen)
  optimale Lösung: 60 = 3·20 (3 Münzen)
- Verhältnis von Greedy- zu optimaler Lösung kann beliebig schlecht werden.
- Beispiel: Münzwerte: 1, B, 2·B + 1, W = 3·B
  Greedy Lösung: 3·B = 1·(2·B + 1) + (B-1)·1 (B Münzen)
  optimale Lösung: 3·B = 3·B (3 Münzen)
- Verhältnis wird beliebig schlecht für wachsende B

Java-Implementierung

```
import java.util.Vector;

public Vector<Integer> Wechsel(Vector<Integer> muenzen, int w) {
   Vector<Integer> ergebnis = new Vector<Integer>();
   if (w >= 0) {
      while (w > 0) {
         int b = GroessteMuenze(muenzen);
         while (muenzen.elementAt(b) <= w) {
            w = w - muenzen.elementAt(b);
            ergebnis.add(muenzen.elementAt(b)); }
         muenzen.remove(b);
      }
   }
   return ergebnis;
}

private int GroessteMuenze(Vector<Integer> muenzen) {
   int index = 0;
   for (int i = 0; i < muenzen.size(); i++) {
      if (muenzen.elementAt(index) < muenzen.elementAt(i)) {
         index = i;
      }
   }
   return index;
}
```

Überblick

- Teile und Herrsche
- Backtracking
- Greedy
- Dynamische Programmierung
- Vollständige Aufzählung
- Sweep-Verfahren

Prinzip

- berechne optimale Lösungen kleiner Teilprobleme direkt
- setze Lösungen für nächstgrößere Teilprobleme aus bekannten Lösungen für kleinere Probleme zusammen
- berechnete Teilergebnisse werden gespeichert (tabelliert) und bei Bedarf wiederverwendet
- wird bei Problemen angewendet, die aus vielen gleichartigen Teilproblemen bestehen
- Rekursion wird durch Wiederverwendung von bereits berechneten Teilproblemen vermieden
  (Rekursion berechnet eventuell gleiche Teilprobleme mehrmals.)

Fibonacci-Zahlen

- $f(0) = 0$
  $f(1) = 1$
  $f(n) = f(n-1) + f(n-2) \quad n \geq 2$

- oder auch
  $f(1) = 1$
  $f(2) = 1$
  $f(n) = f(n-1) + f(n-2) \quad n \geq 3$

- nach Leonardo Fibonacci benannt (1180 – 1241)

Rekursive Implementierung

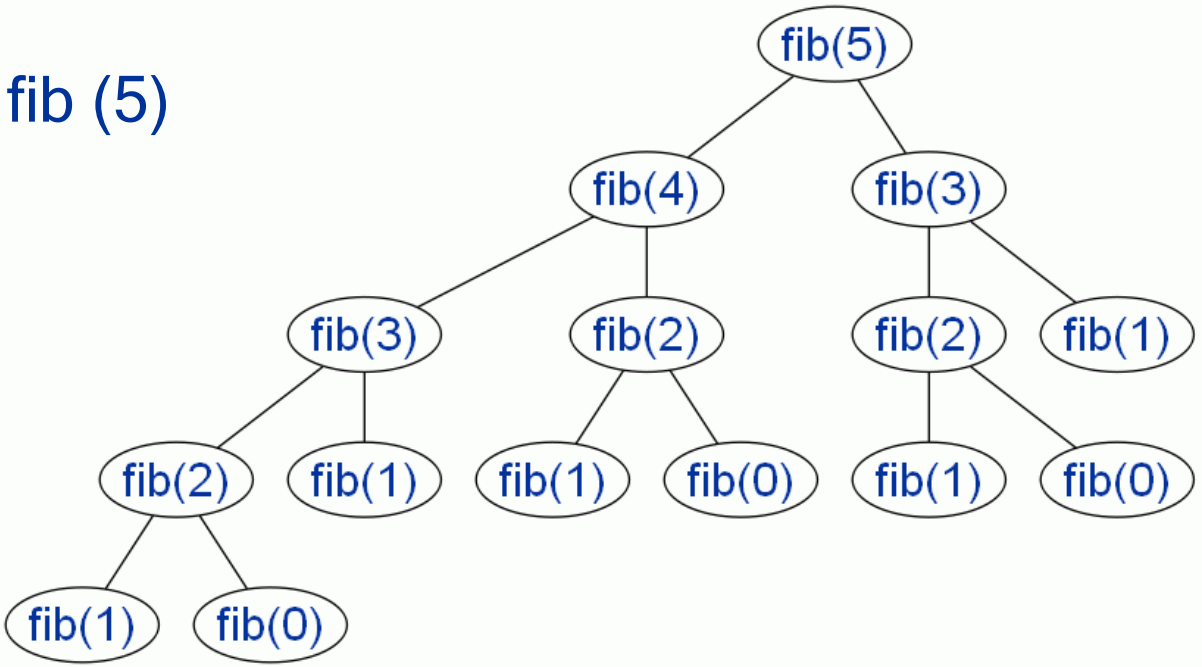
```
procedure fib( n:integer ) : integer
   if (n== 0) or (n==1) then
      return n;
   else
      return fib(n-1) + fib(n-2);
```

Java-Implementierung

```
public int fib(int n) {
   if (n == 0 || n == 1) {
      return n;
   }
   else {
      return fib(n - 1) + fib(n - 2);
   }
}
```

Illustration - Aufrufbaum

- fib (5)



- Laufzeit: $T(n) \approx 1.618^n$

$T(n) \leq T(n-1) + T(n-2) + c,\ T(0) = T(1) \leq c$

$$T(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Beweis durch vollständige Induktion

Problem

- Rekursiver Ansatz berechnet mehrfach identische Teilprobleme
- Speicherung (Tabellierung) von Teillösungen wäre sinnvoll

Dynamisches Programmieren

- Problem P: f (n) = f (n-1) + f (n-2)
- Bestimmung der Menge T, die alle Teilprobleme von P enthält, welche für die Gesamtlösung bekannt sein müssen
  { f (n-1), f (n-2), …, f (1), f (0) }
- Bestimmung einer Reihenfolge T_1, …, T_k der Teilprobleme in T, sodass für die Lösung von T_i nur auf bekannte T_j mit j<i zurückgegriffen werden muss
  f (0), f (1), …, f (n-2), f (n-1)
- Sukzessive Berechnung und Speicherung (Tabellierung) der Lösungen zu T_1, T_2, …, T_k, P
  f (0), f (1), …, f (n-2), f (n-1), f (n)

Fibonacci-Zahlen
Iterativer Ansatz

```
procedure fib ( n:integer) : integer
    f(0) := 0;
    f(1) := 1;
    for k:=2 to n do
        f(k) := f(k-1) + f(k-2);
    return f(n);
```

- lineare Laufzeit
- benötigt ein Feld f der Größe n zur Speicherung der Teillösungen f (k)
- linearer Speicherbedarf $\in$ O (n)

Java-Implementierung

```
public int fib2(int n) {
   int[] f = new int[n + 1];
   f[0] = 0;
   f[1] = 1;
   for (int k = 2; k <= n; k++) {
      f[k] = f[k - 1] + f[k - 2];
   }
   return f[n];
}
```

Fibonacci-Zahlen
Alternativer Ansatz

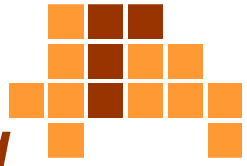
```
procedure fib ( n:integer) : integer
   f_vorletzte := 0; f_letzte := 1;
   for k:=2 to n do
   begin
      f_aktuell   := f_letzte + f_vorletzte;
      f_vorletzte := f_letzte;
      f_letzte    := f_aktuell;
   end
   if ( n ≤ 1 ) then
      return n;
   else
      return f_aktuell;
```

- lineare Laufzeit
- konstanter Platzbedarf (unabhängig von n)

Java-Implementierung

```
public int fib3(int n) {
   int f_vorletzte = 0;
   int f_letzte = 1;
   int f_aktuell = 1;
   for (int k = 2; k <= n; k++) {
      f_aktuell = f_letzte + f_vorletzte;
      f_vorletzte = f_letzte;
      f_letzte = f_aktuell;
   }
   if (n <= 1) {
      return n;
   }
   else {
      return f_aktuell;
   }
}
```

Fibonacci-Zahlen
Effiziente rekursive Implementierung



```
procedure fib ( n:integer) : integer
   f(0) := 0;
   f(1) := 1;
   for k:=2 to n do
      f(k) := -1;
   return lookupFib (n);
```

Feld für Teillösungen
{ 0, 1, -1, -1, …, -1 }

```
procedure lookupFib ( k:integer) : integer
   if ( f(k)!=-1 ) then
      return f(k);
   else
   begin
      f(k) := lookupFib(k-1) + lookupFib(k-2);
      return f(k);
   end;
```

Teillösung existiert bereits.

Teillösung muss berechnet werden.

Jede Teillösung wird nur einmal berechnet !

Java-Implementierung

```
public int fib4(int n) {
   int[] f = new int[n + 1];
   f[0] = 0;
   f[1] = 1;
   for (int k = 2; k <= n; k++) {
      f[k] = -1;
   }
   return lookupFib(n, f);
}

private int lookupFib(int k, int[] f) {
   if (f[k] != -1) {
      return f[k];
   }
   else {
      f[k] = lookupFib(k - 1, f) + lookupFib(k - 2, f);
      return f[k];
   }
}
```

Überblick

- Teile und Herrsche
- Backtracking
- Greedy
- Dynamische Programmierung
- Vollständige Aufzählung
- Sweep-Verfahren

Prinzip

- Systematische Erzeugung aller Lösungskandidaten
- Auswahl des optimalen Lösungskandidaten anhand einer Zielfunktion (Kostenfunktion)
- meist schlechte Effizienz

Problem des Handlungsreisenden

- Eingabe: Städte 1, …, n mit Entfernungen $d_{ij} > 0$ für $i \neq j$
- Ausgabe: Reihenfolge der Städte mit minimaler Gesamtstrecke

Optimaler Reiseweg durch 15 Städte
(43.589.145.600 mögliche Reisewege)

www.wikipedia.de – Problem des Handlungsreisenden

Implementierung

```
procedure shortestPath ( n:integer) : integer
   initialize( d(n,n) );
   initializePermutations (P, n);
   minDist = ∞;
   forall curOrder in P do
   begin
      curDist :=0;
      for i:=0 to n-2 do
         curDist := curDist +
         d (curOrder(i), curOrder(i+1));
      curDist := curDist +
      d (curOrder(n-1), curOrder(0));
      if (curDist<minDist) minDist=curDist;
   end;
   return minDist;
```

Matrix mit allen Entfernungen

Menge aller möglichen Reihenfolgen. (0, 2, 1, 3, 4) ist ein Element dieser Menge für n=5.

curOrder ist eine mögliche Reihenfolge.

curDist enthält die Gesamtstrecke von curOrder.

Java-Implementierung

```
public static double travelingSalesman(int n) {
   initializePermutations (n);
   double minDist = Double.MAX_VALUE;
   for (int[] curOrder : P) {
      double curDist = 0;
      for (int i = 0; i <= n-2; i++) {
         curDist += d(curOrder[i], curOrder[i+1]);
      }
      curDist += d(curOrder[n-1], curOrder[0]);
      if (curDist<minDist) minDist=curDist;
   }
   return minDist;
}
```

Überblick

- Teile und Herrsche
- Backtracking
- Greedy
- Dynamische Programmierung
- Vollständige Aufzählung
- Sweep-Verfahren

Prinzip

- Raum mit allen Elementen des Problems wird ausgefegt bzw. abgetastet (sweep).
- Eine Status-Struktur wird während des Abtastens aller Elemente mitgeführt und aktualisiert (Sweep-Status-Struktur).
- In der Regel wird das Problem mit einer (n-1)-dimensionalen Struktur abgetastet.
  - 1D-Feld wird durch Punkt abgetastet (ausgefegt).
  - 2D-Ebene wird durch 1D-Gerade abgetastet.
  - 3D-Raum wird durch 2D-Ebene abgetastet.
- Wenn alle Elemente des Problems besucht (abgetastet) wurden, kann aus der Sweep-Status-Struktur die Lösung ermittelt werden.

1D-Problem - Maximum

```
procedure max(q:array of integer):integer
    maxSoFar := q[0];
    for i:=0 to q.length()-1 do
        if (maxSoFar < q[i]) then
            maxSoFar := q[i];
    return maxSoFar;
```

- 1D-Feld q wird abgetastet (jedes Element q [i] wird einmal besucht).
- 0D-Struktur (maxSoFar) wird mitgeführt und aktualisiert, um daraus nach dem Abtasten das Maximum zu ermitteln.

Java-Implementierung

```
public class Main {

   public static void main(String[] args) {
      // TODO Auto-generated method stub
   }

   public int max(int[] q) {
      int maxSoFar = q[0];
      for (int i = 0; i < q.length; i++) {
         if (maxSoFar < q[i]) {
            maxSoFar = q[i];
         }
      }
   return maxSoFar;
   }
}
```

1D-Problem
Maximale Teilsumme

- Eingabe: Feld q von n ganzen Zahlen
- Ausgabe: Maximale positive Teilsumme aufeinander-folgender Elemente von q. Existiert keine positive Teilfolge, ist das Ergebnis 0

J. L. Bentley. *Programming Pearls*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1985.

```
procedure maxSubArray(q:array of integer):integer
   maxSoFar := 0; maxEndingHere := 0;
   for i:=0 to q.length()-1 do
   begin
      maxEndingHere := max (0,maxEndingHere+q[i]);
      maxSoFar := max (maxSoFar,maxEndingHere);
   end
   return maxSoFar;
```

0D-Status-Struktur

Abtastung aller Elemente des 1D-Problems

O(n)
schneller als Teile-und-Herrsche-Ansatz

Illustration

q	2	-3	5	-2	-1	8	-4	1	-9	3	-1	9	-1	2
maxEndingHere	2	0	5	3	2	10	6	7	0	3	2	11	10	12
maxSoFar	2	2	5	5	5	10	10	10	10	10	10	11	11	12

- Funktioniert nur, wenn man negative Teilsummen als Ergebnis ausschließt. Dadurch kann man negative Werte von maxEndingHere ausschließen und auf 0 setzen.
- Negative Teilsummen am Anfang und am Ende eines potentiellen Ergebnisses können dann nicht zum Ergebnis beitragen.

Java-Implementierung

```
public class Main {

   public static void main(String[] args) {
   }

   /**
    * @param Feld q von n ganzen Zahlen
    * @return Maximale positive Teilsumme aufeinanderfolgender
   Elemente von q. Existiert keine positive Teilfolge, ist das
   Ergebnis 0
    */

   public int maxSubArray(int[] q) {
      int maxSoFar = 0;
      int maxEndingHere = 0;

      for (int i = 0; i < q.length; i++) {
         maxEndingHere = Math.max(0, (maxEndingHere + q[i]));
         maxSoFar = Math.max(maxSoFar, maxEndingHere);
      }
   return maxSoFar;
   }
}
```

Dichtestes Paar einer Menge von Zahlen (1D)

- Eingabe: Feld q von n ganzen Zahlen
- Ausgabe: min | q [i] – q [j] | mit $0 \leq i, j \leq n-1$

- naive Lösung ist in $O(n^2)$

- Idee:
  - Betrachte nur Paare,
    die der Größe nach benachbart sind.
  - Wenn die Elemente in q sortiert sind, kann eine einfache Sweep-Lösung realisiert werden.

Dichtestes Paar einer Menge von Zahlen (1D)

- `procedure minDiff (q:array of integer) : integer`

```
    q := sort (q);

    minDiffSoFar := q[1] – q[0];

    for i:=2 to q.length()-1 do
       if minDiffSoFar > q[i] – q[i-1] then
          minDiffSoFar = q[i] – q[i-1];

    return minDiffSoFar;
```

sortiere Elemente in q
O (n log n)
(lernen wir noch kennen)

Sweep-Status

Taste das Problem ab

O (n log n)

Sweep ist in O(n). Laufzeit ist durch das Sortieren dominiert.

Illustration

q	32	-2	31	0	30	3	27	7	23	8	17	10	11	17
q sortiert	-2	0	3	7	8	10	11	17	17	23	27	30	31	32
minDiffSoFar			2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

Java-Implementierung

```
package main;
import java.util.Arrays;

public class Main {

   public static void main(String[] args) {
   }

   public int minDiff(int[] q) {
      Arrays.sort(q);
      int minDiffSoFar = q[1] - q[0];
      for (int i = 1; i < q.length; i++) {
         if (minDiffSoFar > (q[i] - q[i - 1])) {
            minDiffSoFar = (q[i] - q[i - 1]);
         }
      }
   return minDiffSoFar;
   }
}
```

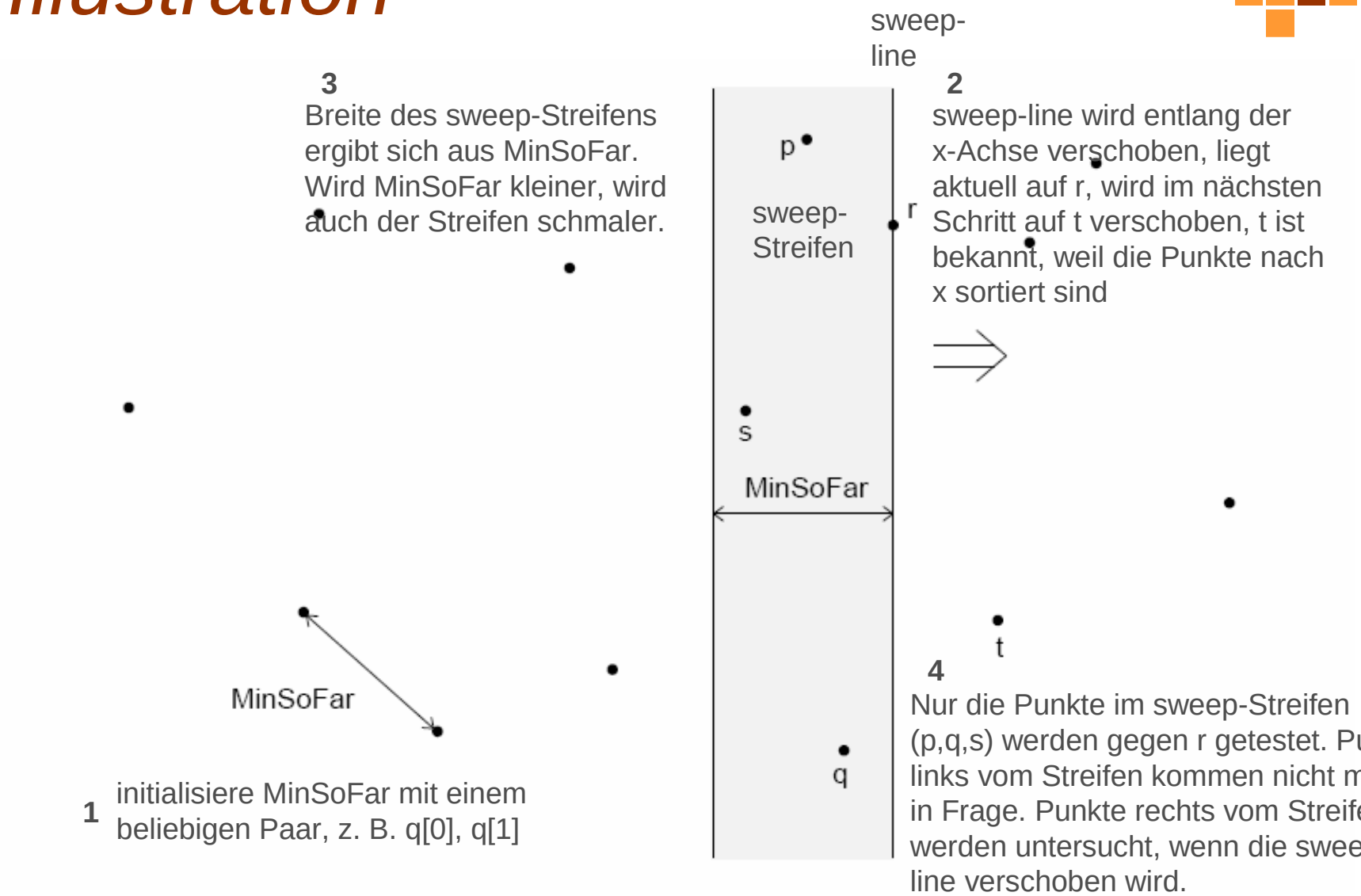
Dichtestes Paar einer Menge von 2D-Punkten

- Eingabe: Menge q von n 2D-Punkten
- Ausgabe: min (dist(q [i], q [j])) mit $0 \leq i, j \leq n-1$
  und $dist(a,b) = ((a.x - b.x)^2 + (a.y - b.y)^2)^{1/2}$

  Jeder Punkt hat eine reelwertige x- und ein y-Komponente
- naive Lösung ist in $O(n^2)$

- Idee:
  - Verfolge eine 1D-Gerade, die über alle 2D-Punkte bewegt wird.
  - Um den jeweils nächsten zu besuchenden Punkt zu ermitteln, wird die Punktmenge sortiert, beispielsweise in Bezug auf die x-Komponente

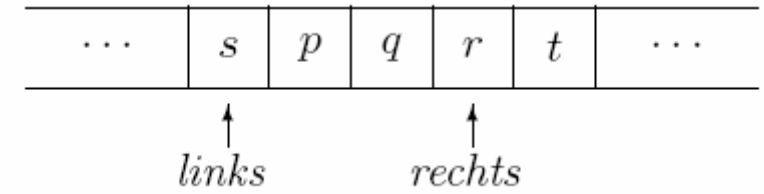
Illustration



Rolf Klein, *Algorithmische Geometrie*, Springer, Berlin, 2005.

Sweep-Status

- enthält den bisher kleinsten Abstand zweier Punkte MinSoFar sowie alle Punkte im sweep-Streifen
- Aktualisierung des Sweep-Status:
  - 1) Wenn der linke Streifenrand über einen Punkt p wandert, dann entferne den Punkt p aus dem Sweep-Status
  - 2) Wenn der rechte Streifenrand auf den nächsten Punkt p wandert, dann füge den Punkt p in den Sweep-Status ein, dann setze den linken Streifenrand auf p.x – MinSoFar und entferne alle Punkte gemäß Regel 1), dann teste alle Punkte im Streifen gegen p auf minimale Distanz und aktualisiere ggf. MinSoFar und den linken Streifenrand.



"links" und "rechts" werden nach rechts über das Feld geschoben, um alle Punkte abzuarbeiten. Nur Punkte zwischen "links" und "rechts" werden gegen den Punkt "rechts" getestet.

Pseudocode

```
procedure minDist (q:array of point2D) : real

   q := sortWithRespectToX (q);
   status   := ∅; status.add(q[0]); status.add(q[1]);
   MinSoFar := dist(q[0],q[1]);
   links    := 0;
   rechts   := 2;

   while (rechts ≤ q.length()-1) do
   begin
      if (q[links].x + MinSoFar ≤ q[rechts].x) then
      begin
         status.remove(q[links]);
         links := links + 1;
      end
      else
      begin
         MinSoFar := minDistBand(status, q[rechts], MinSoFar);
         status.add(q[rechts]);
         rechts := rechts + 1;
      end
   end
   return MinSoFar;
```

sortieren O (n log n)

initialisiere sweep-Status
MinSoFar und Menge {q[0], q[1]}

sweep – rechter Rand
läuft über alle Punkte

Entferne Punkte aus dem Status, die links vom Streifen liegen. Der "else"-Teil wird erst durchlaufen, wenn hier alle entsprechenden Punkte entfernt wurden.

Verschiebe den rechten Rand. minDistBand testet den neuen rechten Randpunkt gegen alle Punkte im Streifen und aktualisiert ggf. MinSoFar.

insgesamt **O (n log n)**
ohne Beweis

Java-Implementierung

```
public double minDist(Point[] q) {

   sortWithRespectToX(q);

   ArrayList<Point> status = new ArrayList<Point>();
   status.add(q[0]);
   status.add(q[1]);

   double MinSoFar = dist(q[0], q[1]);
   int links = 0;
   int rechts = 2;

   while (rechts < q.length) {
      if (q[links].x + MinSoFar <= q[rechts].x) {
         status.remove(q[links]);
         links++;
      }
      else {
         MinSoFar = minDistBand(status, q[rechts], MinSoFar);
         status.add(q[rechts]);
         rechts++;
      }
   }
   return MinSoFar;
}
```

Java-Implementierung

```
public double minDistBand(ArrayList<Point> status, Point q, double
minSoFar) {
   for (int i = 0; i < status.size(); i++) {
      if (status.get(i) != null) {
         Point element = status.get(i);
         double elementDist = dist(element, q);

         if (elementDist < minSoFar) {
            minSoFar = elementDist;
         }
      }
   }
   return minSoFar;
}

public Double dist(Point q, Point q2) {

   double x = q.x - q2.x;
   double y = q.y - q2.y;
   double dist = Math.sqrt(x * x + y * y);

   return dist;
}
```

Zusammenfassung

- Teile und Herrsche
  - zerlege ein Problem in kleinere Teilprobleme, löse diese - je nach Größe - rekursiv oder direkt, setze die Teillösungen zusammen
- Backtracking
  - erweitere Teillösungen schrittweise, Bewertungsfunktion prüft Gültigkeit einer Teillösung, Teilschritte können rückgängig gemacht werden
- Greedy
  - wähle Schritt mit dem momentan größten Zugewinn, Bewertungsfunktion ermittelt beste Alternative in einem Schritt, gewählte Teilschritte werden nicht rückgängig gemacht

Zusammenfassung

- Dynamische Programmierung
  - berechne, speichere und wiederverwende Teillösungen bei Problemen, die aus vielen gleichartigen Teilproblemen bestehen
- Vollständige Aufzählung
  - generiere und bewerte alle Lösungskandidaten mit einer Zielfunktion, um die beste Lösung zu ermitteln
- Sweep-Verfahren
  - taste alle Elemente des Problems mit einer Status-Datenstruktur ab, die Status-Datenstruktur wird aktualisiert und enthält das Ergebnis

Nächstes Thema

- Datenstrukturen
  - Listen